

NOM : VOGIN

Prénom : Lambert

Jury :

Algèbre — Entourez l'épreuve — Analyse

Sujet choisi : Diagonalisabilité en dimension finie. (legon 155*)

Autre sujet : REF: Groudon, FGN, Debeaumarché.

k désigne ici un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie notée n. <u>I) Définitions, premières propriétés, critères de diagonalisabilité</u> A) Valeurs propres, spectre Def 1: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\exists x \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in k$ tels que $ux = \lambda x$, on dit que λ est une valeur propre de u (vp) et on note $E_\lambda(u) = \{x, \overline{v} \text{ de } u \text{ associé à } \lambda\} \cup \{0\}$. Ex 2: Si $\overline{v} \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, ses valeurs propres sont 0 et 1, et $\{E_0(\overline{v}) = \text{Ker } \overline{v}, E_1(\overline{v}) = \text{Im } \overline{v}\}$. • Si $h \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie de rapport λ, h n'admet que λ pour valeur propre, et $E_\lambda(h) = E$. Prop 3: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une vp de u. $E_\lambda(u)$ est un sous-E_λ appelé <u>espace propre</u>. Théorème 4: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in k$. Alors $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ où (dim finie) (i): λ vp de u (ii): $\text{Ker } (u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0\}$ (iii): $u - \lambda \text{Id}_E \notin \mathcal{GL}(E)$ Def 5: Le spectre de $u, u \in \mathcal{L}(E)$, est $\{\lambda, u - \lambda \text{Id}_E \text{ non inversible}\}$. Grâce au théorème 4 et à la dimension finie: $\text{Sp}(u) = \{\text{valeurs propres}\}$ Def 6: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à $A \in \mathcal{L}(k^n)$. On définit les valeurs propres, les vecteurs propres, les sous-espaces propres et le spectre de A comme étant ceux de u. Prop 7: λ vp de $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$ a une sol non nul, donc n'est pas de rang $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$	Ex 8: $\text{Sp}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \{\alpha - \beta, \alpha + (\beta - 1)\beta\} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Prop 5: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit B base de E. Soit $M = \text{Mat}_B(u)$, on a: $\bullet \text{Sp } A = \text{Sp } u$ $\bullet x \in E, u \in \text{Mat}_B(u) \Leftrightarrow E(M)$ Cor 10: Soit $A: u \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{O} \in \text{Sp}_n, A \in \mathcal{GL}_n(k) \Leftrightarrow \mathcal{O} \in \text{Sp } A$. B) Polynôme caractéristique Def 11: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit le polynôme caractéristique de A et u par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ $\chi_u(X) = \det(X \text{Id}_E - u)$ Ex 12: Polynôme caractéristique des matrices tridiagonales. Prop 13: χ_A est de la forme $X^n - \text{tr } A X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$ Prop 14: Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A Prop 15: Deux matrices semblables ont même χ, Sp. Def 16: Soit λ vp de A. On appelle multiplicité de λ vp λ, (notée m_λ) sa multiplicité comme racine de χ_A. Cor 17: $\text{Card}(\text{Sp}(A)) \leq n$ Def 18: Si k est algébriquement clos, le nombre des valeurs propres comptées avec multiplicité vaut n. Cor 19: Si $k = \mathbb{R}$ et n impair, A admet au moins une vp réelle. Cor 20: Les vp d'une matrice triangulaire (ou diagonale) sont ses coefficients diagonaux. Cor 21: Si χ_A est scindé, alors $\bullet \text{tr } A = \sum_{\lambda \in \text{Sp } A} \lambda m_\lambda$ $\bullet \det A = \prod_{\lambda \in \text{Sp } A} \lambda^{m_\lambda}$
---	--

NOM : VOGIN

Prénom : Lambert

Jury :

Algèbre — Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : A55*

Autre sujet :

<u>C) Trigonalisabilité et diagonalisabilité</u> Lef 22. $A \in M_n(k)$ est dite <u>trigonalisable</u> si, et seulement si, $\exists P \in GL_n(k)$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit <u>trigonalisable</u> si, et seulement si, $\exists B$ base de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ est triangulaire supérieure. Prop 23. A trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ scindé. Cor 24. Si k est algébriquement clos, $\forall A \in M_n(k)$, A est trigonalisable. En particulier, toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ l'est. Prop 25. Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Prop 26. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes : (i) $\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_u} (E_\lambda(u)) = E$ (ii) $\exists$ une base de E formée de $\vec{v}$ de u. (iii) $\exists$ Base de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ est diagonale. (iv) $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_u} \dim E_\lambda(u) = n$ (v) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}_u, m_\lambda = \dim(E_\lambda(u))$ (vi) $\exists F_1, \dots, F_r$ ss-ev de E tq $\bigoplus_{i=1}^r F_i = E$ et $\forall i, u _{F_i}$ est une homothétie $F_i \rightarrow F_i$. Lef 27. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie les assertions de la prop 26, on dit que u est <u>diagonalisable</u>. Lef 28. Soit $A \in M_n(k)$ et soit $u \in \mathcal{L}(k^n)$ son endomorphisme canoniquement associé. A est dite <u>diagonalisable</u> si, et seulement si, u l'est. Prop 29. A diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(k)$ tq $P^{-1}AP$ diagonale. Prop 30. Si χ_u est scindé simple, u est diagonalisable.	<u>D) Polynômes annulateurs</u> Prop 31. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\mathcal{I}[P \in k[X] \text{ tq } P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}]$ est un idéal de $k[X]$, non réduit à $\{0\}$. De plus, $\exists \pi_u$, polynôme unitaire tel que $\mathcal{I} = \pi_u \cdot \mathcal{Q} \in k[X]$. Lef 32. On appelle π_u le <u>polynôme minimal</u> de u. Exo 33. Le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est X^3. Théorème 34. Si $P \in k[X]$ annule $u \in \mathcal{L}(E)$, alors, si λ vp de u, $P(\lambda) = 0$. Théorème 35. (Lemme des noyaux) Si $P_1, \dots, P_r$ sont des polynômes premiers entre eux, on a, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker}(\prod_{i=1}^r P_i(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } P_i(u)$. Théorème 36. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) où : (i) u est diagonalisable (ii) $\exists$ P scindé à racines simples tq $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (iii) π_u est scindé à racines simples. Exo 37. Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables. Prop 38. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit F ss-ev de E stable par u. $\chi_{u _F} \mid \chi_u, \pi_{u _F} \mid \pi_u$. Exo 39. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$. Soit $F = \text{Vect}((u^i(x))_{i \in \mathbb{N}})$. Montrer que F est le plus petit ss-ev stable par u contenant x. • $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ base de F Cor 40. π_u est le produit des polynômes premiers entre eux des $\pi_{u _F}$. Théorème 41. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors $\exists B$ base de E telle que $\text{Mat}_B(u)$ et $\text{Mat}_B(v)$ diagonales.
---	--

mieux voir

NOM : VOGIN

Prénom : Lambert

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 155*

Autre sujet :

<u>E) Critère topologique</u> Théorème 4.2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $S(M) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } P^{-1}MP = \lambda I \}$ 1) M diagonalisable $\Leftrightarrow S(M)$ formé 2) M nilpotente $\Leftrightarrow 0 \in S(M)$ Remarque 4.3: 0 est la seule matrice diagonalisable et nilpotente. <u>II) Ajout d'une structure hermitienne</u> <u>A) Endomorphismes normaux</u> On suppose maintenant $k = \mathbb{C}$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hermitien Prop 4.4: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\exists ! v \in \mathcal{L}(E)$ tq $\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle \forall x, y \in E$ et $v = u^*$ Def 4.5: $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si, et seulement si, $u = u^*$ Prop 4.6: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un s.s. cv de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. De plus, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda^\perp$ est stable par u. Prop 4.7: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. (i) u est normal $\Leftrightarrow$ (ii) u est normal $\Leftrightarrow$ (iii) u est normal (i) u est normal (ii) u est diagonalisable dans une base orthonormée. (iii) u et u^* sont diagonalisables dans une même base orthonormée. Ex. 4.8: Endomorphismes unitaires, hermitiens. <u>B) Endomorphismes autoadjoints</u> On suppose maintenant $k = \mathbb{R}$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien, ou $k = \mathbb{C}$ et $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hermitien. Def 4.9: u est autoadjoint si, et seulement si, $u = u^*$. Théorème 5.0: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. • Sp $u \subset \mathbb{R}$ • Il existe une base de vecteurs propres orthogonaux Corollaire 5.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $\exists C$ orthogonale tq $C^{-1}MC$ diag. • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, $\exists C$ unitaire tq $C^{-1}MC$ diag. Théorème 5.2: $O_n(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \xrightarrow{(\theta, S)} GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{(\theta, S)} \mathcal{O}_S$	<u>III) Applications de la diagonalisation</u> <u>A) Systèmes linéaires</u> Exo 53: Calcul de $\left(\frac{\alpha(P)}{\alpha} \right)^n \forall n \in \mathbb{N}$. Exo 54: Calcul de $\exp \left(\frac{\alpha(P)}{\alpha} \right)$. Prop 5.5: Soit $X'(t) = AX(t)$ un système différentiel linéaire. Si A est diagonalisable, on peut se ramener à la résolution de n équations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants. Exo 56: $P''' = \alpha P'' + \beta P' + \gamma f$. <u>B) Décomposition de Dunford</u> Théorème 5.7: Soit $M \in \mathcal{M}_n(k)$. $\exists ! (A, N) \in \mathcal{M}_n(k)$ tq • $M = A + N$ • $AN = NA$ • A diagonalisable • N nilpotente Exo 58: Réécriture de $\exp: \mathcal{M}_n(k) \rightarrow \mathcal{M}_n(k)$. <u>C) Résultats de densité</u> Théorème 5.9: L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(k)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(k)$. Remarque 6.0: Le résultat est faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
--	--

Dev. 1

Dev. 2

Sur $\mathbb{R}$: Π trigonalisable $\Leftrightarrow \exists$ une mat diag de $S(\Pi)$
 $\Rightarrow$: on peut appliquer le lemme.
 $\Leftarrow$: regarder χ_Π

Développement 1

Leçon 155* du 20 octobre 2015

Références

FGN, Algèbre 2 & Mare aux développements

Théorème

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $S(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$

1. M est diagonalisable si, et seulement si, $S(M)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$
2. M est nilpotente si, et seulement si, $0 \in \overline{S(M)}$

Developpement

L'essentiel de la preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme

Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $\alpha > 0$.

$\exists M_\alpha \in S(M)$ triangulaire supérieure telle que $|(M_\alpha)_{i,j}| \leq \alpha \quad \forall j > i$ et M et M_α ont les mêmes coefficients diagonaux.

Preuve du lemme

Soient donc $M = (m_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\mathbb{C})$ et $\alpha > 0$.

Soient $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Posons $B = \left(\frac{1}{p}e_1, \frac{1}{p^2}e_2, \dots, \frac{1}{p^n}e_n\right)$, c'est une base de $\mathbb{C}^n$. On a alors :

$$\left(M \left(\frac{1}{p^j}e_j\right)\right)_i = m_{i,j} \frac{1}{p^j} \quad \forall i < j$$

donc

$$M \left(\frac{1}{p^j}e_j\right) = \sum_{i=1}^j m_{i,j} \frac{1}{p^j} e_i = \sum_{i=1}^j \frac{m_{i,j}}{p^{j-i}} \left(\frac{1}{p^i}e_i\right) \quad \forall j$$

En notant P la matrice de passage de la base canonique dans la base B , on a donc

$$P^{-1}MP = \left(\frac{m_{i,j}}{p^{j-i}}\right)_{i,j} \in S(M)$$

En prenant $p > 1$ et $p > \frac{\max\{|m_{i,j}|\}}{\alpha}$, on a

$$\left|\frac{m_{i,j}}{p^{j-i}}\right| \leq \frac{|m_{i,j}|}{p} < \alpha \quad \forall i < j$$

Donc $M_\alpha = P^{-1}MP$ convient.

De plus, M_α a les mêmes coefficients diagonaux que la matrice M (qui sont donc les valeurs propres de M), ce qui conclut la preuve du lemme.

Preuve du théorème

Soit M dans $M_n(\mathbb{C})$. Quitte à trigonaliser M , et donc obtenir une matrice triangulaire supérieure semblable à M , on peut supposer M triangulaire supérieure.

Premier point

Supposons que $S(M)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_{1/k}$ vérifiant les propriétés du lemme appliqué à M et $1/k$. Ce sont donc des matrices triangulaires supérieures, ayant toutes la même diagonale que M . De plus,

$$\forall i < j \quad \left|(M_{1/k})_{i,j}\right| < \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

Donc $(M_{1/k})$ converge vers la matrice D , diagonale, ayant pour coefficients les coefficients diagonaux de M . Or $S(M)$ est un fermé, et $M_{1/k} \in S(M) \quad \forall k$.

Donc $D \in S(M)$, donc M est semblable à D , donc M est diagonalisable.

Réciproquement, supposons M diagonalisable.

Soit une suite $(M_k)_k$ d'éléments de $S(M)$ convergeant dans $M_n(\mathbb{C})$. On note A sa limite. On a $\pi_M = \pi_{M_k}$ et $\chi_M = \chi_{M_k}$ pour tout k par similitude. De plus, les applications associant une matrice N à $P(N)$, où P est un polynôme, sont continues (car polynomiales en les coefficients), ainsi que l'application associant à une matrice N son polynôme caractéristique χ_N (le déterminant étant polynômial en les coefficients). On a donc, si π_N désigne le polynôme minimal de N :

$$\pi_M(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_M(M_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \pi_{M_k}(M_k) = 0$$

Donc A est diagonalisable, car annulée par un polynôme scindé à racines simples (et π_M l'est car M est diagonalisable). Mais on a aussi :

$$\chi_A = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{M_k} = \chi_M$$

Ainsi, A et M sont diagonalisables, et ont les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités. On a donc A et M semblables à une même matrice diagonale, donc semblables.

Second point

Supposons M nilpotente.

M n'a donc que 0 pour valeur propre. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M_{1/k}$ vérifiant les propriétés du lemme appliqué à M et $1/k$. Ce sont donc des matrices triangulaires supérieures, ayant toutes leur diagonale nulle. En procédant de la même manière que dans la preuve du premier point, on a $M_{1/k} \rightarrow 0$. Donc $0 \in \overline{S(M)}$.

Supposons que $0 \in \overline{S(M)}$.

On a donc $(M_k)_k$ une suite d'éléments de $S(M)$ convergeant vers 0. On a, par similitude, $\chi_M = \chi_{M_k}$ pour tout k , donc

$$\chi_M = \lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{M_k} = \chi_0 = X^n$$

Donc M est nilpotente.

Leçon 155* - Développement 2 : Décomposition polaire

Énoncé: $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

$(O, S) \mapsto OS$

big récipro. $\mathbb{C}$
de la récipro. est $\mathbb{C}$

Développement:

1) Continuité de φ

- φ est bien définie (car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$).
- φ est bilinéaire, donc continue (dimension finie).

2) Surjectivité

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (car ${}^t(Mx) = \|Mx\|_2^2 > 0 \forall x \neq 0$).

Donc tMM est diagonalisable en base orthonormée et ses valeurs propres sont > 0 :

$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$P({}^tMM)P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Posons $D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

On a ${}^tMM = P^{-1}D^2P$

Posons $S = P^{-1}DP$. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\sqrt{\lambda_i} > 0 \forall i$ et ${}^tS = S$ (${}^tP = P^{-1}$).

Posons $O := MS^{-1}$. On a ${}^tOO = (S^{-1})^tMMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$

3) Injectivité

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $O, O' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $M = OS = O'S'$

donc $S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')(OS) = {}^tS'O'^{-1}O'S' = S'^2$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \forall i$ (existe par interpolation de Lagrange)

On a $S = PDP = P^{-1}Q(D^2)P = Q(P^{-1}D^2P) = Q({}^tMM) = Q(S^2) = Q(S'^2)$

Or S' commute avec $Q(S'^2)$, donc avec S .

Donc S et S' codiagonalisables: $\exists U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que:

Interpolat° (x_i, y_i)
 x_i distincts $\Leftrightarrow$
 $y_i = f(\text{fond}^\circ \text{ des } x_i)$

On n'a pas besoin de λ_i distincts car
 $\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_j}$

$$S = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$S' = U \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$O: S^2 = S'^2, \text{ donc } \alpha_i^2 = \beta_i^2 \quad \forall i.$$

$$\text{Or } \alpha_i > 0 \text{ et } \beta_i > 0 \text{ car } S, S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ donc } \underline{S = S'}.$$

$$\text{De plus } OS = O'S' = O'S, \text{ donc}$$

$$\underline{O = O'}$$

4) Continuité de φ^{-1}

$$\text{Soit } (M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (GL_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}} \text{ telle que } M_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} M \in GL_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{Posons, } \forall p \in \mathbb{N}, (O_p, S_p) = \varphi^{-1}(M_p) \text{ et } (O, S) = \varphi^{-1}(M).$$

Par compacité de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $(O_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence, qu'on note $\bar{O}$. Soit (p_k) une extraction telle que $O_{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{O}$.

$$\text{On a } S_{p_k} = O_{p_k}^{-1} M_{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{O}^{-1} M =: \bar{S}$$

$$\bar{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\text{Or } \bar{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

$$\text{Donc, par unicité de la décomposition polarisée } \underline{(\bar{O}, \bar{S}) = (O, S)}.$$

$(O_p)_{p \in \mathbb{N}}$ admet donc une unique valeur d'adhérence : O .

$$\text{Par compacité de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{ on a } \underline{O_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} O}$$

← pourquoi pas de la comp?

$$\text{et } S_p = O_p^{-1} M \xrightarrow{p \rightarrow \infty} O^{-1} M \text{ donc } \underline{S_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} S}$$

Donc $\underline{\varphi^{-1}}$ est bien continu.

Pourquoi $O \mapsto O^{-1}$ c.o. ?

Leçon 155*: [Diagonalisabilité en dimension finie]

Questions

- Alg K_A scindé $\Rightarrow A$ trigonalisable

$\rightarrow$ Récurrence $\lambda \in \sqrt{\chi_A}$ de K_A . e_i $\vec{v}_i$ associé à λ

TBI $\rightarrow (e_1, \dots, e_n)$

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} v = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & * \\ 0 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & A' \end{pmatrix} \quad K_A = (X-\lambda) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scindé}}}{K_{A'}}$$

- v diag $\wedge E \cap F$ v $\wedge F$ v $\wedge F$ stable par v Alg v diag $\wedge F$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad p \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(A) & * \\ 0 & p(A') \end{pmatrix}$$

- Lien thm 50 et cor 51?

Réciproque du 1er pt du cor 51?

- dem prop 47?

- cor 51

$$\rightarrow \Pi = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Pi = P \begin{pmatrix} \alpha - \beta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha + (n-1)\beta \end{pmatrix}$$

$$\Pi^k = P \begin{pmatrix} \alpha^k & & \\ & \beta^k & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\exp \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi^k}{k!} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha-\beta} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha+(n-1)\beta} \end{pmatrix} P^{-1}$$

et si on veut pas calculer Π ?

$$\rightarrow Q \text{ poly : } \begin{matrix} \alpha - \beta \mapsto e^{\alpha-\beta} \\ \alpha + (n-1)\beta \mapsto e^{\alpha+(n-1)\beta} \end{matrix} = \text{dte.}$$

$$\exp \Pi = Q(\Pi)$$

