

REF: - Objectif Agrégation
- Géométrie, Algèbre
- FGN 1 et 2

154*

NOM : LEROUVILLOIS Prénom : Vincent

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes en dimension finie.

154*

Autre sujet : Applications.

Soit E un K -ev de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Sous-espaces stables par un endomorphisme et exemples

1) Définitions, exemples

Def 1: Un sous-espace vectoriel (s.e.v) F de E est dit stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Prop 2: L'intersection et la somme de deux sous-espaces stables par u est encore stable par u .

Ex 3: $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .

Si u est une homothétie, alors tout s.e.v est stable par u .

Si u est la projection sur F parallèlement à G , F et G sont stables.

Si u est une symétrie par rapport à F , parallèlement à G , F et G sont stables par u .

Prop 4: Soit F un s.e.v de E . Il y a équivalence entre F est stable par u et dans toute base de E , B , obtenue par complétion d'une base de F , $\text{Mat}(u)_B$ et de la forme

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{\dim(F), n-\dim(F)}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-\dim(F)}(K)$

Coro 5: Soit $E = F \oplus G$. Si F et G stables par u , alors dans toute base B de E obtenue par complétion d'une base de F et d'une base de G et réciproquement

$$\text{Mat}(u)_B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

2) Endomorphismes induits

Prop 6: Si F est stable par u , $u|_F$ définit un endomorphisme de F .

Not 7: On note Π_0 le polynôme minimal (resp. caractéristique) de u .

Prop 8: Si F est stable par u , alors $\mathcal{L}(u|_F) \mid \mathcal{L}(u)$ et $\Pi_{u|_F} \mid \Pi_u$

Coro 9: u n'a pas de s.e.v stable non trivial si χ_u est irréductible

Rem 10: Tout $\mathbb{R}$ -ev de dim finie a au moins une droite ou un plan stable.

3) Utilisation de la commutativité

Prop 11: Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutant ($uv = vu$), alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(v)$ sont stables par u .

Coro 12: Pour tout polynôme $P \in K[X]$, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

Ex 13: Pour $P = X - \lambda$, $\lambda \in K$, $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est stable par u , on l'appelle sous-espace propre pour la valeur λ .

Si $\chi_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$ est scindé, on définit l'espace caractéristique $C_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{m_\lambda})$ qui est aussi stable par u .

Ex 14: Pour $P = X^k$, on obtient que $\text{Ker}(u^k)$ est stable par u .

Donc $0 \subseteq \text{Ker } u \subseteq \text{Ker } u^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker } u^k \subseteq \text{Ker } u^{k+1} \subseteq \dots$ est une suite croissante de s.e.v stables par u , appelée suite des noyaux itérés.

Prop 15: $(\dim \text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante qui est donc stationnaire à partir d'un certain rang $\leq n$.

4) Étude d'exemples

Prop 16: Si u est nilpotent, d'indice de nilpotence n , alors E admet exactement $n+1$ s.e.v stables: ce sont les $\text{Ker}(u^k)$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

Exo 17: Trouver les s.e.v stables de l'endo canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ce sont id, les droites incluses dans $\text{Ker } u = \langle e_1, e_2 \rangle$, les plans contenant e_1 , et K). Il y en a une infinie.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Il y en a 9).

Prop 18: Si u stabilise toutes les droites de E , alors u est une homothétie.
 Coro 19: Si u stabilise tous les sous-espaces de dimension k , avec $k \in \{1, n-1\}$, alors u est une homothétie.

Appl 20: $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{\pm I_n\}$ ($n \geq 2$), $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{I_n\}$ (n impair ≥ 3)
 $= \{\pm I_n\}$ (n pair ≥ 3)

Appl 21: le noyau de l'action de $GL(E)$ sur $P(E)$, P espace projectif de E définie par $(U, x) = Ux$ est l'espace des homothéties. On définit donc $PGLE = GL(E)/\text{homothéties}$.

II - Décomposition en somme de sous-espaces stables

1) Lemme des noyaux, critère de diagonalisabilité

Thm 22: Soit $P_1, \dots, P_k$ des polynômes deux à deux premiers entre eux.
 Alors $\text{Ker}(P_i) = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^k \text{Ker}(P_j)$ avec $P = \prod_{i=1}^k P_i$.

Rq 23: On applique souvent le lemme des noyaux à $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ ou à $P = X^n$, qui sont deux polynômes annulateurs de u (pu de l'équation de Cayley-Hamilton).
 Def 24: u est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de E , 0 qui est équivalent à $E = \bigoplus_{\lambda \in S_u(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$

Prop 25: u est diagonalisable si et seulement si $\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ est scindé à racines simples.
 Ex 26: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car les valeurs propres sont 1, 2 et -4.

Coro 27: Si u est diagonalisable et F est stable par u , alors $u|_F$ est diagonalisable.
 Appl 28: $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable ssi A et B le sont.

Prop 29: Si X_u est scindé (toujours vrai si k est algébriquement clos, $k = \mathbb{C}$ par exemple), alors u est diagonalisable ssi tout $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est stable par u admet un supplémentaire stable par u .

Prop 30: Si u est diagonalisable, alors l'ensemble de ses s.e.s stables est exactement les sommes de droites stables par u .

Rq 31: Si de plus, les valeurs propres sont distinctes, il y en a exactement 2.

2) Utilisation de la dualité

Prop 32: $U: E^* \rightarrow E^*$ est l'application linéaire $u \mapsto u \circ u$ $\text{Ker}(U) = \{u \in E^* \mid u \circ u = 0\}$

Prop 33: F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par u^* .

Coro 34: U a une droite stable ssi U a un hyperplan stable.

Coro 35: U est diagonalisable ssi X_U est scindé sur K .

Rq 36: La preuve du corollaire 35 donne une méthode de trigonalisation.

Comme $\text{Mat}(u) = \text{Mat}(u)$ ($\mathbb{R}^n$ étant la base duale de B), si on trouve un vecteur propre x de $\text{Mat}(u)$, on a alors $u(x) = \lambda x$ est stable par u et on utilise la récurrence à $U|_M$.

Ex 37: $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $X_M = (1-X)^3$ $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Prop 38: Si de plus, E est muni d'un produit scalaire, on peut définir l'adjoint u^* . Alors F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par u^* .

Coro 39: Si U est hermitien, anti-hermitien ou unitaire (ou symétrique anti-symétrique ou orthogonal) alors F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u .

Lemme 40: Si u est normal ($u \circ u^* = u^* \circ u$) alors F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u .

Thm 41: Soit E un espace euclidien de dimension n ($K = \mathbb{R}$) et u un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée de E , B telle que

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ ou } \lambda_i \in i\mathbb{R}$$

Thm 42: Si E est un espace hermitien de dim n ($K = \mathbb{C}$) et u un endomorphisme normal, alors u est diagonalisable en base orthonormée.

3) Sous-espaces caractéristiques, réduction de Dunford

Prop 43: Si u est trigonalisable (ssi $X_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ est scindé), puis le lemme des noyaux:

$$E = \bigoplus_{\lambda \in S(u)} C_\lambda \text{ avec } C_\lambda = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda})$$

Thm 44: (Décomposition de Dunford) Si u est trigonalisable, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathbb{Z}(E)^2$ avec d diagonalisable et n nilpotent tels que

$$u = d + n \text{ et } d \circ n = \text{mod}$$

d et n sont des polynômes en u .

Appl 45: On peut calculer l'exponentielle d'un endo. trigonalisable à partir de sa décomposition de Dunford. $\exp(u) = \exp(d) \times \exp(n)$ (car $d \circ n = \text{mod}$)

Def 46: Un bloc de Jordan de taille i est une matrice $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_i(K)$

Thm 47: Soit u un endomorphisme nilpotent. Il existe une unique suite d'entiers $(d_1, \dots, d_m)$ telle que dans une certaine base B de E (où d_i est le nombre de blocs de Jordan de taille i).

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} J_{d_1} & 0 \\ 0 & J_{d_m} \end{pmatrix}$$

Coro 48: Notant $d_i(u)$ le nombre de blocs de Jordan de taille i dans la décomposition on a u et v sont semblables ssi $\forall i \in \mathbb{N}, d_i(u) = d_i(v)$.

Ex 49: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

4) Endomorphismes cycliques, décomposition de Frobenius

Prop 50: Soit $x \in E$, $\langle x \rangle = \{P(u)x / P \in K[X]\}$ est le plus petit s.e.v stable par u . On note $\Pi_{u,x}$ le polynôme minimal unitaire de x qui est le générateur du module de $P_i \mapsto P(u)x$.

Def 51: On dit que u est cyclique si $\exists x \in E / \langle x \rangle = E$.

Prop 52: $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$, $\exists x \in E / \Pi_{u,x} = \Pi_u$, $\Pi_{u,x} = \Pi_{u'} \langle x' \rangle$.

Thm 53: (Réduction de Frobenius) Soit $u \in \mathbb{Z}(E)$. On peut décomposer

$$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i \text{ avec } F_i \text{ stables par } u \text{ tel que } u|_{F_i} \text{ est cyclique}$$

. Notant $P_i = \Pi_{u|_{F_i}}$, on a $P_1 \mid P_2 \mid \dots \mid P_r$ et la suite de polynômes (P_i)

Ne dépend que de u , pas du choix de la décomposition. (unicité)

Les (P_i) sont appelés les invariants de similitude de u

Appl 54: Soit L/K une extension de corps de K et $A, B \in M_n(K)$.

On a A et B sont semblables dans $M_n(K)$ ssi elles le sont dans $M_n(L)$.

III - Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes

1) Réduction simultanée

Prop 55: Soit $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E qui commutent 2 à 2

Si tous les φ_i sont diagonalisables (resp. trigonalisables), on peut les

co-diagonaliser (resp. co-trigonaliser), i.e il existe une base de E dans

laquelle les matrices des φ_i sont toutes diagonales (resp. triangulaires supérieures)

Appl 56: La somme et la composée de 2 endo. diagonalisables (resp. trigonalisables) qui commutent est encore diagonalisable (resp. trigonalisable).

Appl 57: Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont diagonalisables, alors $\phi: \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AM - MB \end{cases}$ est aussi diagonalisable

= le spectre de l'application $\psi: \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AMB \end{cases}$ est $\{ \lambda \mu / \lambda \in \text{Sp}(A), \mu \in \text{Sp}(B) \}$

2) Représentations de groupe

Def 58: Soit $K = \mathbb{C}$ et (ρ) une représentation d'un groupe G , V un s.e.v de V . Si U est stable par la famille $(\rho(g))_{g \in G}$, on dit que $(U, \rho|_U)$ est une sous-représentation. Si (ρ) n'a pas de sous-représentations, on dit qu'elle est irréductible.

Prop 59: Si G est abélien, comme $\forall g \in G, \rho(g)$ annule $X - 1$ qui est scindé, à racines simples sur $\mathbb{C}$, les $(\rho(g))_{g \in G}$ sont co-diagonalisables.

Coro 60: Si G est abélien, les seules représentations irréductibles sont de dimension 1. Réciproquement est vraie.

Prop 61: Tout s.e.v stable par la famille $(\rho(g))_{g \in G}$ admet une sous-représentation stable par la famille $(\rho(g))_{g \in G}$.

Coro 62: (Thm de Maschke) Tout représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Développement 1: Réduire des endomorphes normaux

Gourdon

• Lemme 1: F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u (u normal)

preuve: F stable par u . Dans B adaptée à la décomp $E = F \oplus F^\perp$

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (\leftarrow F \text{ stable})$$

$${}^t\pi\pi = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA & * \\ * & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix}$$

u normal

$$\Rightarrow {}^t\pi\pi = \begin{pmatrix} (A^tA + B^tB) & * \\ * & C^tC \end{pmatrix}$$

$$\text{Car } {}^tBB + {}^tCC = C^tC \Rightarrow \text{tr}({}^tBB) + \text{tr}({}^tCC) = \text{tr}(C^tC)$$

$$\Rightarrow \text{tr}({}^tBB) = \sum_{i,j} b_{ij}^2 = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (\text{dr } \mathbb{R}) \quad \text{car } \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

• Lemme 2: Si u n'a pas de $\vec{v}^p$ alors u a un plan stable.

$\in \mathbb{R}(X)$

preuve: π_0 poly min de u . $\deg \pi_0 = 0 \quad \exists P = aX^2 + bX + c, \pi_0 = PQ$

$$\text{Ker}(P(u)) \neq \{0\}. \quad \text{Sinon, } \forall x \neq 0, \pi_0(u(x)) = \frac{P(u(x)) \times Q(u(x))}{P(u(x))} = Q(u(x))$$

$$\Rightarrow \forall x, Q(u(x)) = 0 \text{ or } \pi_0 \text{ minimal.}$$

Soit $x \in \text{Ker}(P(u)) \setminus \{0\}$. Soit $F = \langle x, u(x) \rangle$ de dim 2 car x pas $\vec{v}^p$. F stable car $u(u(x)) = a u(x) + b x \in F$.

• On finit par montrer $\mathcal{B}$ valait par récurrence.

$n=1$ ok.

$n=2$. * 1er cas $\rightarrow v_1 \vec{v}^p$, alors $\langle v_1 \rangle^\perp$ stable de u diagonalisable.

* 2ème cas $\rightarrow u$ a pas de $\vec{v}^p$. B base de E . $\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$${}^t\pi\pi = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ * & * \end{pmatrix} = \pi {}^t\pi = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow ab+cd = ac+bd \quad \text{donc } b = \pm c$$

Si $b=c$ alors on a u sym de $\exists c$ d'un $\vec{v}^p$. Pas possible.

Sinon, $b=-c$ $ab-bd = -ab+bd$ donc $a=d$.

$$\text{Mat}_B u = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

$n \geq 2$. Si rés vrai jusqu'à n . $\dim E = n+1$.

* 1er cas: $v_1 \vec{v}^p$. $\langle v_1 \rangle^\perp$ stable. H.R. $E = \langle v_1 \rangle + \langle v_1 \rangle^\perp$

* 2ème cas: u a un plan stable (Lemme 2). F . H.R. $E = F \oplus F^\perp$

on va de même

Léçon 134: Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes en dim ∞ . Applications.

I. Questions / Exercices.

y faut y avoir réfléchi pr cette leçon

(1) Soit u un endomorphisme quique. Peut-on caractériser $\{F \text{ ser de } E, F \text{ stable par } u\}$? Notamment, peut-il être infini?

- 3 exs où il est fini:
 - u nilpotent d'indice $\dim E$
 - u diag à np distinctes
 - u, K_u irréductible (un seul esp. stable).

• Soit u quique. Soit F ser stable. $K_{u|_F} = \prod_{i=1}^r p_i^{z_i} \mid \chi_u = \prod_{i=1}^c p_i^{x_i}$
avec $x_i \leq z_i \forall i \in \{1, r\}$.

$$F = \bigoplus_{i=1}^r (\text{Ker}(p_i^{x_i}(u|_F)))$$

(2) Pasche (cor 62). Un que $\Rightarrow$ pr lequel ce serait faux?

$$e: \mathbb{Z} \rightarrow GL(V) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(k \mapsto A^k)$$

En fait dire que la prop. 61 n'est pas vrai pr un seul endomorphisme c'est dire que c'est pas vrai pour le repr. de $\mathbb{Z}$.

(3) Quel est ce qu'il y a trop comme endomorphisme normal que symétriques et antisymétriques?

Similitudes.

Éventuellement que ce trais là en réduisant à des ser-esp. (exactement ce qu'on montre avec le dt 1). On a donc un peu des mixtes des 3.

