NOM : PINAULT Prénom : Laureline Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Polynomes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

~~Autre sujet :~~

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne un corps (commutatif) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. u désigne en général un élément quelconque de $\mathcal{L}(E)$.

I. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$. [DEB] (+ [OA])

Def-Prop 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note φ_u : $\begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array}$. φ_u est un morphisme d'algèbre et on note $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Im}(\varphi_u)$.

Rq 2. Dès que $n \geq 2$, φ_u n'est pas surjectif. $(\forall u)$

Prop 3. φ_u n'est pas injectif. $(\forall u)$

Csq 4. $\forall u$, $\{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0\} = \mathrm{Ker}(\varphi_u)$ est un idéal non restreint à $\{0\}$ de $\mathbb{K}[X]$. Il est principal. On note alors π_u le polynome minimal (unitaire) de u : $\mathrm{Ker}(\varphi_u) = (\pi_u)$.

Exples 5. • Le polynome minimal d'un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence r est X^r.

• Le polynome minimal d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est $X - \lambda$.

Csq 6. $\mathbb{K}[u] \simeq \mathbb{K}[X]/(\pi_u)$ (isomorphisme d'algèbre). On en déduit que $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre finie de dimension $\deg \pi_u$.

Prop 7 (Théorème chinois). Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ tq que $\pi_u = P_1 \dots P_r$ et $\forall i \neq j$ $P_i \wedge P_j = 1$. Alors :
$\mathbb{K}[u] \overset{\text{\tiny{K-alg}}}{\simeq} \mathbb{K}[X]/(\pi_u) \overset{\text{\tiny{K-alg}}}{\simeq} \mathbb{K}[X]/(P_1) \times \dots \times \mathbb{K}[X]/(P_r)$

II. Utilisation des polynomes dans la réduction des endomorphismes.

1. Décomposition en sous-espaces stables grâce à un polynome annulateur [DEB] + [G] + [OA]

Prop 8. (Théorème des noyaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$. Alors : $\mathrm{Ker}((P_1 \dots P_r)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

Cor 9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0$. En notant $P = \alpha P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P_i \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $P_i \wedge P_j = 1$ pour $i \neq j$:
$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$

De plus, la projection sur $\mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}(P_j^{\alpha_j}(u))$ est un polynome en u, $\forall i$.

Prop 10. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.
En particulier, si v est un polynome en u alors le résultat est toujours vrai.

Csq 11. Le corollaire 9 fournit une décomposition de l'espace en sous-espaces stable par u.

Exple 12. (endomorphismes semi-simples). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. [G] [OA]
On dit que u est semi-simple si $\forall F \subset E$ stable par u, $\exists G \subset E$, stable par u tel que $F \oplus G = E$. Alors :
u est semi-simple si et seulement si π_u est le produit de polynomes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

Rq 13. Cela s'interprète en disant que u est semi-simple si et seulement si $\mathbb{K}[u]$ est isomorphe à un produit de corps.

Références :
- Gourdon, Algèbre [G]
- Beck, Objectif agrégation [OA]
- Debeaumarché, manuel de mathématiques volume 4 [DEB]

2 Des sous-espaces stables simples : diagonalisation. [DEB]

Def 14. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une <u>valeur propre</u> de $u \in \mathcal{L}(E)$ si il existe $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$.
x est un <u>vecteur propre</u> associé à λ.

Def 15. Soit λ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. $E_\lambda = \mathrm{Ker}((X-\lambda)(u))$ est un sous-espace stable par u appelé <u>sous espace propre</u> de u associé à λ.

Exple 16. • L'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent est 0.
• L'unique valeur propre d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est λ et $E_\lambda = E$.

Prop 17. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0$. Alors $P(\lambda) = 0$.

Rq 18. La réciproque est a priori fausse. Par exple $X(X-1)$ annule Id_E mais 0 n'est pas valeur propre de Id_E.

Def 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynome caractéristique de u et on note χ_u le polynome $\det(u - X\,id_E)$.

Prop 20 (Théorème de Cayley-Hamilton). $\chi_u(u) = 0$

Prop 21. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$ si et seulement si $\pi_u(\lambda) = 0$

Exple 22. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont exactement ses coefficients diagonaux

Cor 23. Un endomorphisme a au plus n valeurs propres.

Def 24. Un endomorphisme u est <u>diagonalisable</u> si il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,u$ est diagonale.

Prop 25. u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propre de u, si et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de u, si et seulement si la somme de dimension des sous espaces propres de u est n.

Prop 26. Si u est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ alors le projecteur sur E_{λ_i} parrallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}$ est $L_i(u)$ où $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$

Rq 27. Cette expression des projecteurs propres nécessite de connaître les valeurs propres.

Prop 28. u est diagonalisable si et seulement si $\pi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propre distinctes de u, si et seulement si u annule un polynome scindé à racines simples.

Exple 29. • Si u est idempotent sur $\mathbb{C}$ alors u est diagonalisable.
• u est diagonalisable sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si $X^q - X$ annule u. [G]
• Si u est nilpotent d'ordre $r > 1$ alors u n'est pas diagonalisable.

Prop 30. Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$. Si u et v sont diagonalisables alors u et v sont co-diagonalisables (ie. dans la même base).

Rq 28 bis. Cela s'interprète en disant que u est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}[u]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^p$ pour un certain p.

3 Des espaces stables moins simples mais plus généraux : trigonalisation. [DEB]

Def/Prop 31. Soit λ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ de multiplicité r (dans le polynome caractéristique). $E_\lambda = \mathrm{Ker}((X-\lambda)^r(u))$ est un sous espace stable par u appelé <u>sous espace caractéristique</u> de u associé à λ. Il est de dimension r.

Def 32. Un endomorphisme u est <u>trigonalisable</u> si il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,u$ est triangulaire

Prop 33. u est trigonalisable si et seulement si E est somme directe des sous espaces caractéristiques de u, si et seulement si la somme des dimension des sous espaces caractéristiques est n.

Prop 34. u est trigonalisable si et seulement si u annule un polynome scindé, si et seulement si π_u est scindé si et seulement si χ_u est scindé.

Exple 35. • Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.
• Si u est nilpotent alors u est trigonalisable

Exercice 36. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{O}(u) = \{ g u g^{-1} ;\ g \in \mathrm{GL}(E) \}$ sa classe de similitude. Alors [FGN, alg2]
ⓐ u est diagonalisable $\overset{\text{sur } \mathbb{C}}{\text{ssi}}$ $\mathcal{O}(u)$ est fermée
ⓑ u est trigonalisable $\overset{\text{sur } \mathbb{R}}{\text{ssi}}$ $\exists\, d$ diagonalisable $\in \overline{\mathcal{O}(u)}$
ⓒ u est nilpotent $\underset{\text{si } \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}{\text{ssi}}$ $0 \in \overline{\mathcal{O}(u)}$ DVT 1

Prop 37. Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$. [G]
Si u et v sont trigonalisables alors u et v sont co-trigonalisables

4 Décomposition en endomorphismes simples : décomposition de Dunford

Prop 38 (Dunford). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Alors : $\exists!\,(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = d+n$ avec :
- d ~~soit~~ diagonalisable, n nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$.

d et n sont alors des polynomes en u. [DVT 2]

Exple 39. Si u est diagonalisable, on a $d = u$ et $n = 0$ qui est l'unique décomposition de Dunford de u.

Prop 39 : (Dunford multiplicatif). Soit $u \in Aut(E)$, trigonalisable. Alors : $\exists!\,(d,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
- d soit diagonalisable, v unipotent.
- $d \circ v = v \circ d$
- $u = d \circ v$

d et v sont alors des polynomes en u.

Rq 40. Si u n'est pas trigonalisable on peut avoir une version affaiblie de Dunford :
$\exists!\,(s,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u = s+n$ avec :
- s semi-simple et n nilpotent
- $s \circ n = n \circ s$

d et s sont alors des polynomes en u.

Rq 41 (Jordan). Souvent on utilise une décomposition plus forte que Dunford : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. [G] Alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon_i & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \ \varepsilon_i \in \{0,1\} \\ \lambda_1 \dots \lambda_p \text{ sont les valeurs propres de } u. \end{cases}$$

III Calcul de fonctions d'endomorphismes

1 Puissances d'endomorphismes [DEB]

Prop 42. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists!\,(Q,R) \in \mathbb{K}[X]$, $\deg R < \deg P$, $X^k = PQ + R$. Alors $u^k = R(u)$.

Rq 43. Si u est diagonalisable, $\exists\, \mathcal{B}$ tq $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = D$ diagonale. Et alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u^k = D^k$, facile à calculer. (⚠ base pas facile à trouver)

Appli 44. (Suites récurrentes linéaires). Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} (u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \\ u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} \end{cases}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 \text{ où } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & & a_p \end{pmatrix}$$

Prop 45. Soit $u \in Aut(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0$ et $P(0) \neq 0$. En écrivant $P = XQ + P(0)$, on obtient :
$$u^{-1} = -\frac{1}{P(0)} Q(u).$$

Exple 46. Si $u \in Aut(E)$ $(u - Id_E)^2 \circ (u - 2Id_E) = 0$ alors
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N},\ u^k = (2^k - k - 1)u^2 + (-2^{k+1} + 3k + 2)u + (2^k - 2k)\, Id_E \\ u^{-1} = \frac{1}{2}(u^2 - 4u + 5 Id_E) \end{cases}$$

2 Calcul de fonctions analytiques dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. [G]

Dans cette section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on munit $\mathcal{L}(E)$ d'une norme subordonnée $|||\cdot|||$ à une norme $\|\cdot\|$ sur E.

Prop 47 $\mathbb{K}[u]$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

Csq 48. Si f est analytique de rayon de convergence $R = +\infty$ alors $f(u)$ est bien définie et est un polynome en u.

Exple 49 (fondamental). $\exp(u)$ est bien défini et est un polynome en u.

Méthode 50. Si on connait $Sp(u) \subseteq A$ fini (ensemble des valeurs propres de u) alors $\exp(u) = R(u)$ où R est le polynome d'interpolation des $\{(a, \exp a),\ a \in A\}$. ($u$ diagonalisable)

Exple 51. Si $(X-a)(X-b)$ annule u avec $a \neq b$ alors
$$\exp(u) = \frac{\exp b - \exp a}{b-a} u + \frac{b \exp a - a \exp b}{b-a} Id_E$$

Méthode 52. Si (d,n) est la décomposition de Dunford de u alors $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$ (qui est la décomposition de Dunford multiplicative)

Exple 53. Si $(X-a)^2$ annule u alors
$$\exp(u) = \exp(a)\,(u + (1-a)\, Id_E)$$
(?)

Appli 54. Les exponentielles de matrice et leur calcul interviennent dans l'expression des solutions d'une équation différentielle à coefficients constants.

Développements :
- Topologie des classes de similitude (exercice 36), FGN algèbre 2
- Décomposition de Dunford + algo effectif pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Gourdon & Rotler. (Prop 38)

Rqs | (I) Défense de plan "plutôt pas mal"

- schéma : bien
- calcul de fonction ⇝ trop vague
- Lapsus $\mathbb{K}[X]$ principal est par premier
- Dvt 1 : un peu trop sorti de nulle part
  Dire que caractériser diag et trig. en élts de topo = joli rés.
- Dvt 2 : bien introduit

(II) Plan

- commencer par $\mathbb{K}[u]$ bien mais un peu expéditif
- Décomp en ss. esp. stables : bien
  Faire ⚠ à la dém du cas 9 (soit par rec, soit prendre le bon polg irred)
- endomorp semi-simple. (dpd pas du corps) Pas obligatoire, bien mais risqué.
  endomorp simple, (dpd du corps) seuls stables = 0 et E ⟺ $\mathbb{K}[u]$ = corps.
- diagonalisation et trigo = bien.
- Cayley-Hamilton : savoir la dém !! → mat compagnon
  → module
  → comatrice.
- Dunford
- On peut mettre + de choses sur l'exp.
  Car sym : on peut écrire la matr comme un polg en son exponentielle.
  On peut parler des représentations
- Appli Jordan ?

(III) Réponse question

moyen. Mieux à la fin.
- somme nilpotents. Être rigoureux !!