NOM : LAVIGNE Prénom : Florian Jury : N°152

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : Déterminant. Exemples et Applications

Autre sujet :

Soit A anneau commutatif, $\mathbb{K}$ corps et $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Introduction

A) Immanents

{caractère de $\mathfrak{S}_n$}

Th 1 (admis) : $\forall \chi \in \hat{\mathfrak{S}}_n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \ \chi(\sigma) \in \mathbb{Z}$.

Déf 2 : Soit $\chi \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ irréductible. On lui associe l'immanent $\mathrm{imm}_\chi : M_n(A) \to A$
$$(a_{ij})_{i,j} \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Ex 3 : Pour $n=3$,
$$\mathrm{imm}_{\chi_{st}}[(a_{ij})] = 2a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}a_{21}.$$

Déf 4 : Le déterminant est $\det := \mathrm{imm}_\varepsilon$ et le permanent $\mathrm{imm}_{1\!\!1} =: \mathrm{per}$.

Ex 5 : $\mathrm{per}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + cb$; $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc$.

Prop 6 : $\forall M \in M_n(A), \forall \chi \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ irr., $\forall P \in \{$matrices de permutations$\}$
$$\mathrm{imm}_\chi(PMP^{-1}) = \mathrm{imm}_\chi(M) = \mathrm{imm}_\chi(M^T).$$

B) Propriété de det

Prop 7 : $\forall M, N \in M_n(A)$, $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(N)\det(M)$

Cex 8 : $\mathrm{per}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = 3 \neq \mathrm{per}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \mathrm{per}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$

Cor 9 : $\forall M \in M_n(A), \forall P \in GL_n(A)$:
$\det(P^{-1}) = [\det P]^{-1}$ et $\det(PMP^{-1}) = \det M$.

Prop 10 : Si une colonne de M est une combinaison linéaire des autres, $\det M = 0$.

Cex 11 : $\mathrm{per}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} = 2$.

Rq 12 : On peut voir det comme une application n-linéaire par rapport aux colonnes.

Déf 13 : Pour $(a_{ij}) \in M_n(A)$, on appelle cofacteur d'ordre (i,j) l'élément suivant et la comatrice $\mathrm{adj}(M) = \hat{M}^T$.
$$\hat{M}_{ij} := \det\left[(a_{ke})_{\substack{k \neq i \\ e \neq j}}\right]$$

C) Méthodes de calcul

Algo 14 : Le pivot de Gauss permet de calculer $\det(M)$. [cf annexe].

Appl 15 : (Vandermonde)
Soit $x_1, \dots, x_n \in A$. Alors $\det\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\right] = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

Prop 16 : $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C\end{pmatrix} = \det A \det C$

Th 17 : (Schur)
Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$, $A \in GL_k(A)$, $\det(M) = \det(A) \cdot \det[D - CA^{-1}B]$

D) Polynôme Dét.

Déf 18 : Posons $X = (x_{ij}) \in M_n(A[x_{11}, \dots, x_{nn}])$. On définit le polynôme déterminant $\mathrm{Dét} := \det(X)$

Rq 19 : Soit $M \in M_n(A)$. Alors $\det M = \mathrm{Dét}(m_{ij})$

Prop 20 : Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$. Alors $\partial_{x_{ij}} \mathrm{Dét}(M) = \hat{M}_{ij}$.

Prop 21 : Pour $M \in M_n(A)$, $M \,\mathrm{adj}\, M = \mathrm{adj}\, M . M = \det M . I_n$.

Cor 22 : On vient de trouver la méthode du développement par une ligne ou une colonne.

Appl 23 : $M \in GL_n(A) \iff \det M \in A^*$.

Rap 24 : Si $P = QR \in A[x_1, \dots, x_n]$ pour A intègre, alors P est homogène $\iff$ Q et R le sont.

Th 25 : Si A est intègre, Dét est irréductible.

Appl 26 : Pour tout hyperplan H de $M_n(A)$, $H \cap GL_n(A) \neq \emptyset$ si A est intègre.

E) Cas des matrices antisymétriques

Prop 27 : Soit $\varphi \in Bil(E)$ alternée pour E $\mathbb{K}$ev de dimension n. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\varphi) = \mathrm{diag}(J, \dots, J, 0, \dots, 0)$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$

Cor 28 : Pour $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $M = Q^T \mathrm{diag}(J, \dots, J, 0) Q$

Prop 29 : Pour $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\, M \equiv 0 [2]$. Le nombre de blocs J dans cor 28 vaut $\mathrm{rg}\, M/2$. Enfin $\det(M) \in \mathbb{K}^2$

Th/Déf 30 : Soit $n = 2m$. $\exists ! \, \mathrm{Pf} \in \mathbb{Z}[(x_{ij})_{i<j}]$:
(i) $\forall \mathbb{K}, \forall M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\det M = \mathrm{Pf}(M)^2$
(ii) $\mathrm{Pf}(\mathrm{diag}(J, \dots, J)) = 1$
Ce polynôme est appelé pfaffien

Rq 31 : Pf se calcule rapidement pour m petit

Ex 32 : Si $m = 1$, $\mathrm{Pf} = x_{12}$.

Ex 33 : Si $m = 2$, $\mathrm{Pf} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$

Prop 34 : Pf est linéaire par rapport à une colonne.

DV1

LAVIGNE Florian

N°152

DV2

Cor35 : P_ℓ est irréductible sur $\mathbb{K}$

II - Utilisation en Algèbre

A) Réduction

Rq36 : On va tenter de réduire M pour calculer "facilement" son déterminant.

Déf37 : $M\in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si : $\exists P\in GL_n(\mathbb{K})$, $PMP^{-1}\in Diag_n(\mathbb{K})$ [resp. $Triang_n^+(\mathbb{K})$].

Th38 : M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ss'il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ - $\mathbb{K}$ scindé à racines simples avec $P(M)=0$

Ex38 : $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$.

Déf40 : $P_M := \det(M-XI_n)$ est le polynôme caractéristique de $M\in M_n(\mathbb{K})$

Th41 : (Cayley-Hamilton) $\forall M\in M_n(\mathbb{K}), P_M(M)=0$

Cex42 : Pour $P=per\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}-XI_2\right]$, $P\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\right]=-2I_2\neq 0$

Algo43 : (Leverrier) On peut calculer P_M en $O(n^3)$ opérations [cf annexe]

Cor44 : M diag. sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow P_M$ scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$

Ex45 : $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Th46 : M trigo. sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow P_M$ scindé sur $\mathbb{K}$.

Cor47 : Toute matrice complexe est trigonalisable

Cex48 : $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

B) Algèbres linéaire et multi-linéaire

On considère E $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Th48 : Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $\vec{e}$ base de E. Alors :
(i) si $p>n$, $\mathcal{A}_p(E)=\{0\}$
(ii) $\mathcal{A}_n(E)$ admet pour base $\det_{\vec{e}}$: si $f\in\mathcal{A}_n(E)$, $f=f(\vec{e})\det_{\vec{e}}$.

Prop50 : Soit $\vec{e}, \vec{f}$ bases de E. Alors $\det_{\vec{e}}(\vec{f})\in\mathbb{K}^*$ et $[\det_{\vec{e}}(\vec{f})]^{-1}=\det_{\vec{f}}(\vec{e})$

Th51 : Soit $\vec{e}$ base de E et $\vec{f}$ famille de n vecteurs de E. Alors : $\vec{f}$ base de $E \Leftrightarrow \det_{\vec{e}}(\vec{f})\neq 0$.

Th52 : Soit $u\in End(E)$. $\exists!\ \det(u)\in\mathbb{K}$, $\forall f\in\mathcal{A}_n(E)$, $\forall x_1,\dots,x_n\in E$: $f(u(x_1)\dots u(x_n))=\det u \cdot f(x_1,\dots,x_n)$

Cor53 : (i) $\det(id_E)=1$
(ii) si $\lambda\in\mathbb{K}$, $u\in\mathcal{L}(E)$ alors $\det(\lambda u)=\lambda^n\det(u)$
(iii) $\forall u,v\in\mathcal{L}(E)$, $\det(v\circ u)=\det v\det u$.

Th54 : $u\in GL(E)\Leftrightarrow \det u\neq 0$.

C) Systèmes linéaires

Déf55 : Un système est dit de Cramer s'il possède n équations à n inconnues sur $\mathbb{K}$, dont la matrice est inversible

Prop56 : Soit un système de Cramer de matrice $M\in GL_n(\mathbb{K})$ de second membre $(b_1,\dots,b_n)$. On pose $M_i\in M_n(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne par ${}^t(b_1,\dots,b_n)$ sans modifier les autres.
La solution $(x_1,\dots,x_n)$ du système existe et est donnée par : $x_i=\dfrac{\det M_i}{\det M}$.

Appl57 : Supposons $\mathbb{K}$ infini. Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ extension et $M,N\in M_n(\mathbb{K})$ avec $N=U^{-1}MU$ pour $U\in GL_n(\mathbb{L})$. Alors :
(i) il existe une base commune aux solutions de $PN=MP$ dans $\mathbb{K}$ et dans $\mathbb{L}$ (P étant l'inconnue)
(ii) $\exists V\in GL_n(\mathbb{K})$, $N=V^{-1}MV$

Appl58 : (Décomposition LU)
Pour $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$ dont $\det((a_{ij})_{1\leq i,j\leq k})\neq 0$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$. Alors il existe un unique couple $(L,U)\in M_n(\mathbb{K})^2$:
(i) $U\in Triang_n^+(\mathbb{K})$
(ii) $L\in Triang_n^-(\mathbb{K})$ et $l_{ii}=1$ $\forall i$
(iii) $A=LU$.

Ex59 : $\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$

D) Résultant

Soit $n\in\mathbb{N}$, $P=a_0+\dots+a_mX^m$ et $Q=b_0+\dots+b_nX^n$ avec $a_m,b_n\neq 0$

Déf60 : La matrice de Sylvester de P et Q est :
$$Syl(P,Q)=\begin{pmatrix}a_m&\cdots&a_0&&(0)\\(0)&\ddots&a_m&\cdots&a_0\\b_n&\cdots&b_0&&(0)\\(0)&\ddots&b_n&\cdots&b_0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}n\\ \\ \}m\end{matrix}$$

Déf61 : Le résultant de P et Q est $Res(P,Q):=\det(Syl(P,Q))$

Prop62 : Soit $\alpha\in A^*$. Alors
$Res(\alpha,Q)=\alpha^n$; $Res(Q,Q)=0$;
$Res(\alpha P,Q)=\alpha^n Res(P,Q)$;
$Res(P,Q)=(-1)^{nm}Res(Q,P)$.

Th63 : Il existe $U\in A_{n-1}[X]$ et $V\in A_{m-1}[X]$ tel que $UP+VQ=Res(P,Q)$.

Cor64 : $P\wedge Q=1 \Leftrightarrow Res(P,Q)\in A^*$.

Lemme65 : Soit $\varphi: A\to B$ morphisme d'anneaux, et $k=\deg(\varphi(Q))$. Alors :
$\varphi(Res(P,Q))=(\varphi(a_m))^{n-k}Res(\varphi(P),\varphi(Q))$

Th66 : Soit $\mathbb{K}$ algébriquement clos et $P,Q\in\mathbb{K}[Y_1,\dots,Y_k][X]$:
$P=\sum_{i=0}^m a_iX^i$ et $Q=\sum_{i=0}^n b_iX^i$, avec $mn\neq 0$
Si $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\mathbb{K}^k$ et $\alpha\in\mathbb{K}$ avec $P(\vec{\alpha},\alpha)=Q(\vec{\alpha},\alpha)=0$, alors $Res_X(P,Q)(\vec{\alpha})=0$. Réciproquement si $Res_X(P,Q)(\vec{\alpha})=0$, alors :
(i) soit $P(\vec{\alpha})(X)=0$
(ii) soit $Q(\vec{\alpha})(X)=0$
(iii) soit $a_m(\vec{\alpha})=b_n(\vec{\alpha})=0$
(iv) $\exists\alpha\in\mathbb{K}$, $P(\vec{\alpha},\alpha)=Q(\vec{\alpha},\alpha)=0$

Appl67 : (Th. de Rothstein-Trager)
Soit $P,Q\in\mathbb{Q}[X]$ avec $P\wedge Q=1$, $\deg P<\deg Q$, Q unitaire sans facteurs carrés

Soit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ avec : $\int \frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \log P_i$ pour $c_i \in \mathbb{K}^*$ (tous différents), P_i unitaires non constants sans facteur carré et premiers entre eux 2 à 2 dans $\mathbb{K}[X]$. Alors les c_i sont exactement les racines distinctes de $\mathrm{Res}_x(P - YQ', Q)$ et les $P_i = (P - c_i Q') \wedge Q$ pour tout i.

III - Lien avec la géométrie

A) Coordonnées barycentriques

Soit ici (O, I, J) repère barycentrique.

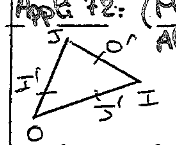
Prop 68: Soit $M_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$. L'équation barycentrique de $(M_1 M_2)$ est $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$

Cor 69: $(x,y,z) \in (M_1, M_2)$ ssi : $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 + t_2 \neq 0$ et $(x,y,z) = (t_1 x_1 + t_2 x_2, t_1 y_1 + t_2 y_2, t_1 z_1 + t_2 z_2)$

Rq 70: On retrouve les coordonnées du milieu de $[M_1 M_2]$

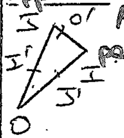
Prop 71: Soit $D_i : a_i X + b_i Y + c_i Z = 0$ pour $1 \leq i \leq 3$. Alors ces 3 droites sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

Appli 72: (Menelaüs)



Alors $O' \in (I'J')$ ssi : $\frac{\overline{JO'}}{\overline{IO'}} \cdot \frac{\overline{OI'}}{\overline{JI'}} \cdot \frac{\overline{IJ'}}{\overline{OJ'}} = 1$

Appli 73: (Céva)



Alors (OO'), (II') et (JJ') sont parallèles ou concourantes ssi $\frac{\overline{IO'}}{\overline{JO'}} \cdot \frac{\overline{OI'}}{\overline{JI'}} \cdot \frac{\overline{IJ'}}{\overline{OJ'}} = -1$

Rap 74: Une conique $\mathcal{C}$ passe par les points O, I et J ssi : $\exists\, p, q, r \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{(x,y,z),\ pyz + qxy + rxz = 0\}$

De plus, $\mathcal{C}$ est dégénérée ssi $pqr = 0$

Th 75: Cinq points distincts définissent "en général" une unique conique. L'unicité a lieu ssi quatre points quelconques ne sont pas alignés.

B) Volumes

Th 76: Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Leb-mesurable. Alors $\mathrm{Leb}(u(X)) = |\det u| \cdot \mathrm{Leb}(X)$.

Ex 77: Soit $R > 0$. Alors $\mathrm{Vol}(B_{\mathbb{R}^n}(0,R)) = R^n \mathrm{Vol}(B_{\mathbb{R}^n}(0,1))$

Déf 78: Soit $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$ le parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$

Prop 79: $\mathrm{Leb}(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Th 80: (Hadamard)
Soit $M = (C_1 | \dots | C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{C_i^* C_i}$. De plus, on a égalité ssi $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale.

Cor 81: Le volume de $\mathcal{P}$ est borné par le produit des longueurs des arêtes, et ce volume est maximal ssi $\mathcal{P}$ est rectangle

Déf 82: Soit $A \in S_n^{++}$ et $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$. L'ellipsoïde $\mathcal{E}(A)$ est $\{x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x \rangle \leq 1\}$

Rq 83: $\mathcal{E}(A)$ est la boule unité de $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$

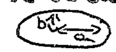
Ex 84: $\mathcal{E}(I_n) = B_{\mathbb{R}^n}(0,1)$.

Prop 85: Soit $B \in S_n^{++}$ avec $A = B^2$. Alors $\mathcal{E}(A) = B^{-1}\, \mathcal{E}(I_n)$.

Cor 86: Pour $A \in S_n^{++}$, $\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(A)) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \mathrm{Leb}(\mathcal{E}(I_n))$

Ex 87: Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ et $A_1 = \begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}$ puis $A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & c^{-2} \end{pmatrix}$. Alors le volume de

(i) $\mathcal{E}(A)$ est πab



(ii) $\mathcal{E}(A_2)$ est $\frac{\pi}{3} abc$

IV - Déterminant et analyse

A) Intégration

Ici, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$.

Déf 88: La jacobienne de $\varphi \in C^1(U,V)$ en x est la matrice dans la base canonique de $D\varphi(x)$: $J_\varphi(x) = (\partial_i \varphi_j(x))_{i,j}$.

Th 89: Soit $\varphi : U \to V$ C^1 difféomorphisme. Une fonction mesurable f est intégrable sur V ssi $(f \circ \varphi) \cdot |\det(J_\varphi)|$ l'est sur U. Dans ce cas : $\int_V f(x)\,dx = \int_U (f \circ \varphi)(y) |\det(J_\varphi(y))|\,dy$

Ex 90: On peut calculer $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Appli 91: (Guldin)
Soit $P = \{x > 0\}$, D ouvert de P de barycentre G et S le solide de révolution en faisant tourner D autour de (Oz) : En prenant $\varphi :]0, 2\pi[\times D \to S \setminus P$, $(\theta, r, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ et $f : \mathbb{1}_{S \setminus P}$, on a $\mathrm{Vol}(S) = 2\pi\, d(G, Oz)\, \mathcal{A}(D)$

Ex 92: Soit $C_{r,h}$ le cylindre de rayon r et de hauteur h. Alors $\mathrm{Vol}(C_{r,h}) = \pi r^2 h$

B) Wronskien

Ici, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $M \in C^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $V_1, \dots, V_n$ des solutions de (E) : $Y' = M(t)Y$

Déf 93: Le Wronskien de $V_1, \dots, V_n$ est $W(V_1, \dots, V_n) : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det((V_i(t)))$

Ex 94: $n = 2$: On a $W(t) = v_1(t) v_2'(t) - v_1'(t) v_2(t)$

Prop 95: Le rang de $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ est indépendant de $t \in I$.

Cor 96: $(V_1, \dots, V_n)$ est une base de l'ev des solutions de (E)
ssi : $\forall t \in I$, $W(t) \neq 0$
ssi : $\exists\, t_0 \in I$, $W(t_0) \neq 0$

Ex 97: $(\cos, \sin)$ est une base de l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$

LAVIGNE Florian

Annexe

Annexe 1 : Algorithme de Gauss

On calcul le déterminant par les opérations suivantes :

(i) $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$. Cela revient à multiplier à droite par la matrice de transvection :

$$T_{\alpha,i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & \alpha & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array} = I_n + \alpha E_{ij}.$$

Le déterminant est inchangé.

(ii) $C_j \leftarrow \alpha C_j$. Cela revient à multiplier à droite par la matrice de dilatation :

$$D_{\alpha,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & j \\ j & \end{array} = I_n + (\alpha - 1) E_{jj}$$

Le déterminant est multiplié par α.

(iii) $C_i \leftrightarrow C_j$. Cela revient à multiplier à droite par la matrice de transposition :

$$\sigma_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \quad\quad i \quad\quad j & \end{array} = I_n - E_{i,i} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}.$$

Le déterminant est multiplié par -1.

Annexe 2 : Algorithme de Leverrier

Soit $\mathbb{K}$ avec $\operatorname{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$. On pose $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = Sp(M)$ et $\Sigma_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \sigma_j$ pour $1 \leq j \leq n$.

On définit les sommes de Newton $S_m := \sum_j \lambda_j^m$, $1 \leq m \leq n$.

Les formules de Newton nous donnent l'algorithme :

$$\sigma_0 = +1 \quad ; \quad \sigma_m = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k s_k \sigma_{m-k}$$

On a alors $P_M = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n$.

À mettre :
- Sarrus (det 3×3)
- lien det & rg
- lien det & multilinéarité
- det = $\prod$ vp :

Q : - cmt on montre que le det est multiplicatif ? (← lin % colonnes)
- appl thm 17 ? (mq inverser c'est aussi cher que multiplier)
- comatrice d'une 2×2 ? $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \right)$
- lien entre prop 21 et cor 22 ?

Exos : - $M_{ij} = \text{pgcd}(i,j)$. det M ? $\left(\text{pgcd}(i,j) = \sum_{\substack{k \mid i \\ k \mid j}} \varphi(k) = \sum \underset{1_{k|i}}{a_{ik}} \underset{1_{k|j}\,\varphi(k)}{b_{kj}} \right)$

- det de $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto {}^tM \end{cases}$? (base $\underbrace{E_{ij} + E_{ji}}_{\mathcal{S}_n}$, $\underbrace{E_{ij} - E_{ji}}_{\mathcal{A}_n}$)

- G gpe fini $\mathbb{K} = \text{Vect}(e_g)$ (= représentation régulière)
det de $f_g : e_h \mapsto e_{gh}$? $\left(\varepsilon(d\text{-cycle})^{N/d} = (-1)^{N \times \frac{1}{d}} \right)$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$? (-3)