

NOM : BECOUET

Prénom : Amélie

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 151 Ev. de dim finie, rang.

Autre sujet : Dimension d'un ev. (on se limitera au cas de la dim finie). Rang. Exemples et applications.

K un corps commutatif, E un K-ev. 1) E ev de type fini, dimension 1.1) Définitions Def 1. (v) une famille de vecteurs de E - est libre si toute cl des (v_i) à coeff non tous nuls est non nulle - est génératrice si $\text{vect}(v_i) = E$ - est une base de E si elle est libre et gén. Ex 2. $B = (e^i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $e^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ est une base de $K^\mathbb{N}$ appelée base canonique. Def 3. Si E admet une partie génératrice finie, on dira que E est de type fini (ou de dimension finie). On notera $\dim(E) < \infty$. Lem 4. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ et $(u_1, \dots, u_p)$ deux familles de E telles que $p > n$ et que chaque u_j est cl des (v_i). Alors la famille (u_j) est liée (ie non libre). Th/Def 5. Si E est de type fini alors toutes les bases de E ont le même cardinal appelée dimension de E et noté $\dim(E)$. À partir de maintenant (dans le 1) E sera de dim finie n. Ex 6. $\dim(K^n) = n$ $\neq \dim(M_n(K)) = n^2$ $\ast K[X]$ n'est pas de type fini. $\ast$ Si $\dim(F) < \infty$, $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ Prop 8. Si $F \subseteq E$ alors $\dim(F) < \infty$ et $\dim(F) \leq n$	Th 9 (Théorème de la base incomplète) Si $(u_1, \dots, u_r)$ libre dans E et $r < n$ alors $\exists (v_{r+1}, \dots, v_n)$ tq $(v_1, \dots, v_n)$ base de E. 1.2) Applications linéaires, matrices Th 10. Soit F un K-ev, $\dim(F) < \infty$ et $\beta = (p_i)$ une base de E et soit (f_i) une famille de n vecteurs de F. Alors, il existe une unique app. linéaire $u: E \rightarrow F$ tq $\forall i \in m, u(p_i) = f_i$. Def 11. Dans le $m \times n$ carré, si $\gamma = (\gamma_i)$ une base de F on écrit $f_i = \sum_{j \in m} \gamma_j \delta_{ij}$ (cette écriture existe est est unique car γ une base de F). La matrice $(f_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ est appelée matrice de u dans les bases β et γ. Ex 12. Si $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u(x, y, z) = (x+y, x-z)$ alors $\text{Mat}_{\beta, \gamma}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Th 13. Soient β et γ des bases de E et F. Alors $\text{Mat}_{\beta, \gamma}: b(E, F) \rightarrow M_{m \times n}(K)$ est un isomorphisme de K-ev. (Si $E = F$ de K-algèbre) 2) Rang 2.1) Des différentes notions. Def 14. Soient F un K-ev de dimension finie m (v) une famille de F, $u \in b(E, F)$ et $M \in M_{m \times m}(K)$. On définit le rang de (v_i), de u et de M comme suit: $\text{rg}(v_i) = \dim(\text{vect}(v_i))$ $\text{rg}(u) = \dim(\text{im}(u))$ $\text{rg}(M) = \dim(\text{im}(M))$
--	--

→ A & prouve avec le TBI !!
 → di rapport jury

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

D1 Bien

• $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^{(1)}, \dots, M^{(n)})$ dans K^n. <u>Ex 15</u> $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y+z \\ 3x+y+2z \end{pmatrix}\right)$ $= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2$. <u>Prop 16</u> Si $M = \text{Mat}_{E,F}(u)$ alors $\text{rg}(u) = \text{rg}(M)$ <u>Th 17</u> (Théorème du rang) Si $\dim(F) = m$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $m = \dim(\text{Ker } u) + \text{rg}(u)$ <u>Cor 18</u> $A \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible si $\text{rg}(A) = n$. <u>3) Espace vectoriels normés de dim finie</u> <u>3.1) Evn : définitions</u> ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) <u>Def 19</u> Soit E un K-ev (pas forcément de dim finie) et $\ \cdot\ : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ x\$ vérifiant * $\forall x \in E, \ x\ \geq 0$ et $\ x\ = 0 \Rightarrow x = 0$ * $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R} \quad \ \lambda x\ = \lambda \cdot \ x\$ * $\forall x, y \in E \quad \ x+y\ \leq \ x\ + \ y\$ Alors $(E, \ \cdot\)$ est appelé un <u>espace vectoriel normé</u>. $\ \cdot\$ est appelée <u>norme</u> de E. <u>Ex 20</u> Sur K^n : $\ x\ _p = (\sum x_i ^p)^{1/p}$ • Sur $\mathcal{M}_n(K)$: $\ M\ _2 = (\text{Tr}(M \cdot M^T))^{1/2}$ $\ M\ _1 = \sup_{\ x\ =1} \ Mx\$ où $\ \cdot\$ norme sur K^n <u>Def 21</u> $M \in E$ est un <u>opérateur</u> si en tant que M il existe une <u>base</u> centrée en x indexée dans M : $B(x, \lambda) = \{y, \ x-y\ < \lambda\} \in M$ ↳ On munit E de la <u>topologie associée</u> <u>Def 22</u> On dit que E <u>vérifie la propriété</u>	de Heine-Borel si les <u>sous-ensembles</u> de E sont exactement les <u>fermés bornés</u>. <u>Def 23</u> $\ \cdot\ _1$ et $\ \cdot\ _2$ deux normes sur E sont dites <u>équivalentes</u> si $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\ x\ _1 \leq \alpha \ x\ _2$ et $\ x\ _2 \leq \beta \ x\ _1$. <u>Exercice</u> : Caractériser les <u>sev</u> de $\mathcal{M}_n(K)$, E, vérifiant (*) $\forall M \in E, \text{rg}(M) \leq 1$. <u>3.2) Evn de dimension finie</u> E est maintenant un <u>evn</u> de dimension finie <u>Th 24</u> - E a la propriété de Heine-Borel <u>Ex 25</u> - Dans $\mathbb{R}^n$, la <u>sphère unité</u> S^{n-1} est <u>compacte</u>. En particulier toute application continue admet un <u>max</u> et un <u>min</u> sur S^{n-1}. <u>Th 26</u> Sur E, toutes les normes sont <u>équivalentes</u>. <u>Ex 27</u> - E est homéomorphe à K^n <u>3.3) Propriétés topologiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$</u> Ici $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme qeq. <u>Prop 28</u> Soit $M \in E$. Alors les applications $\mu_M^A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mu_M^A(N) = MN$ et $\mu_M^P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mu_M^P(N) = NM$ sont continues. <u>Ex 29</u> : En particulier changer de base est une <u>opération continue</u> <u>Prop 30</u> - L'application $\pi_{ij} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ $\pi_{ij}(M) = (M)_{ij}$ est continue <u>Ex 31</u> - Considérer une <u>seu</u> matrice de M est une <u>opération continue</u>.
--	--

FONDAVEN TAL

NOM :

Prénom :

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi :

Autre sujet :

4) de rang comme (invariant). <u>Prop 32</u>. Si $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ sont des bases de $\mathbb{R}^m$ alors il existe $P, Q \in GL_m(\mathbb{R})$ tq $\forall u \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$ $\text{Mat}_{\beta, \gamma'}(u) = P \text{Mat}_{\beta, \gamma}(u) Q^{-1}$ <u>Def 33</u> On se place dans $E = M_n(\mathbb{R})$ et on considère l'action $GL_n(\mathbb{R})^2 \curvearrowright E$ de $\mathbb{R}$ par $(P, Q). M = PM.Q^{-1}$. On dit alors que M et M' sont <u>équivalentes</u> (noté $M \sim M'$) ssi M et M' sont dans la même orbite sous l'action de G (i.e. $M' = PM.Q^{-1}$) <u>Rq 34</u> Vu la prop 32 $M \sim M'$ ssi M et M' représentent la même app. linéaire dans des bases éventuellement $\neq$tes. <u>Théorème 35</u> Le rang est invariant pour l'action de $GL_n(\mathbb{R})^2$. <u>Th 36</u> Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M')$ alors $M \sim M'$. En particulier et avec la théorie précédente on a $M_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{r \leq n} \text{Orb}(J_r)$ où $J_r = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_r, \underbrace{0 \dots 0}_{n-r})$. <u>Th 37</u> $\text{Orb}(J_r) = \bigsqcup_{r' \leq r} \text{Orb}(J_{r'})$ 4.2 Classes de congruence <u>Def 38</u> $E = M_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(K)$. en choisissant une base on a une bijection entre les formes quadratiques sur K^n et $M_n(K)$, φ tq	$\varphi(M)(x) = x^T M x$. Par abus de notation on notera $M(x)$ pour $x^T M x$ et on prouvera q M des propriétés de formes quadratique (ex: $M > 0$). <u>Ex 39</u> On représente $q(x, y, z) = xy + yz + zx$ par $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. <u>Prop 40</u> Si β, γ sont deux bases de K^n, il existe $P \in GL_n(K)$ tq $\forall q$ forme quad. $\varphi_\beta(q) = P \cdot \varphi_\gamma(q) \cdot P^T$. <u>Def 41</u> On considère l'action de $GL_n(K)$ sur $E = P \cdot S = P^T P^T$. On dit que S et S' sont congruentes (noté $S \equiv S'$) ssi S et S' sont dans la même orbite sous l'action de $GL_n(K)$. <u>Def 42</u> Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ on note $p(S) = \max \{ \dim F, F \leq \mathbb{R}^n, S _F > 0 \}$ et $q(S) = \text{rg}(S) - p(S)$. Le couple $(p(S), q(S))$ est appelé <u>signature</u> de S. <u>Prop 43</u> $p(S)$ est le nombre de valeurs propres > 0 de S, $q(S)$ de < 0. <u>Th 44</u> Si $K = \mathbb{C}$ on a $M \equiv N$ ssi $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$. Si $K = \mathbb{R}$ on a $M \equiv N$ ssi $(p(M), q(M)) = (p(N), q(N))$. En particulier $M_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup \text{Orb}(J_{p,q})$ où $J_{p,q} = \text{diag}(\underbrace{1 \dots 1}_p, \underbrace{-1 \dots -1}_q, \underbrace{0 \dots 0}_{n-p-q})$ et $M_n(\mathbb{C}) = \bigsqcup \text{Orb}(J_r)$ où $r = p+q$. <u>Th 45</u> Notons $\mathcal{G}_{p,q} = \text{Orb}(J_{p,q})$ dans $M_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{G}_{p,q} = \bigsqcup_{p' \leq p, q' \leq q} \mathcal{G}_{p',q'}$.
---	--

Rings diviso

- cas des appli^{ns} les fam. gen / fibres / base
- une appli^{on} ^(du fin. au g) = interpolateur de Lagrange (Je rai formules explicites)
- se restreindre à cas dim finie $\Rightarrow$ pas bs de l'axiome du chx.
- (Je l'ave = ax. chx en dim ∞)
- TBI en dim ∞

- Il manque: dimension = card (fam. gen. min) - card (fam. fibre max)

- Equivalence des normes

Bs de la compacité de la sphère unité pour une norme

Bs de l'équiv des normes pr les fermés bornés = compact $\rightarrow$ compacité de la sphère unité

Bonne façon de faire:

* segments de $\mathbb{R}$ - compacts ($\leftarrow$ dichotomie ou connexité des segments)

* pr les compacts = compact $\rightarrow$ paré de $\mathbb{R}^n$

* on a les fermés bornés pour la $\| \cdot \|_\infty$

* $\Rightarrow$ sphère unité compacte pour $\| \cdot \|_\infty$

* $\Rightarrow$ équiv des normes

* fermés bornés = compact pr la norme

- peut parler de réduc^o (dim des sr. espaces propres, ...)

- peut parler d'exten^o de corps, degré d'inertie alg construite à la règle 84 au temps

- réduc^o de Jordan.

- aurait été intéressant: caract du rg

eg. det extrait $\neq 0$ plus gd $\rightarrow$ utile pr thm 37.

- Δ pr les fct^{ns} continues à l'ordre et aux préimages.

- Devrait y avoir le pivot de Gauss (algo) du le plan !! (au moins le mentionner, pas faut écrire l'algo), permet de mettre le plan en perspective.

- Bs des dimen^o du dual ... (en exple par exple)

(dualité en gnat)

- Formule de Grassman: $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$

$\hookrightarrow$ à mettre du le plan.

- + d'exples, eg. familles échelonnées de poly

- $(f_1, \dots, f_k) \in E^*$ Ker $f_i = H_i \subset E$ rg $(f_1, \dots, f_k) = 0 \iff \dim \bigcap H_i$

- impl^{te}: $f \in \mathcal{X}(E)$ dim $E < \infty$. $\text{rang}(f) = \text{rang}(f|_{H_i})$

Exercice

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow = (2) - (1) - (3)$$

5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot
DE
GAUSS

$$\text{rg}(A) = 2.$$

Exercice // $\dim E = n$, $F \subseteq E$, $\dim F = p$. $\dim E/F = ?$ ($n-p$)

$(E \sim E/F \times F \leftarrow \text{à montrer})$

$\pi: E \rightarrow E/F$ projec^o canonique

$$n = \dim \underbrace{\text{Ker } \pi}_F + \underbrace{\text{rg}(\pi)}$$

$\hookrightarrow \dim E/F$ car π surjective.

Exercice $\dim(E^*) = ?$ ($\dim E$)

base $\rightarrow$ base duale

$$e_i \mapsto e_i^*, \quad e_i^*(x) = x_i$$

$\uparrow$
 $\sum x_i e_i$

Exercice [1] $\exists Q, \{P \in \mathbb{R}[X]\}$

$$P = Q(X+1) - Q(X)$$

$$U(Q) = Q(X+1) - Q(X)$$

U linéaire

$$U : \underbrace{\mathbb{R}[X]_{\leq n}}_{n+1} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}[X]_n}_n$$

mq. U est surjective

$\nwarrow$ on fait sauter le terme de degré le plus grand.

U surjective $\Rightarrow \text{rg}(U) = n \Rightarrow \dim \text{Ker } U = 1$

Réciproque OK.

$$\nwarrow n+1 = \text{rg}(U) + \dim(\text{Ker } U).$$

$\text{Ker } U = \{Q, Q(X) = Q(X+1)\} = \{\text{poly-cte}\}$ de dim 1.

Liste de chrs si la lagon

- Conique définie par 5 pts (Eiden p. 52-54)
- Réduc° de Jordan (des nilpotents) (trop lg sinn) (Jordan alg p. 197-198)
- Construc° règle et compas (Escoffier p. 71-73)
- $[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}] = 2^n$ où p_i premiers distincts
- Générateurs du gpe $\perp$
 $f \in \mathcal{O}(E), r = \text{rg}(f - \text{id})$ (FGN alg. 3 p. 61)
- ss-ev de $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dim finie stables par $f \mapsto f(\cdot + t) \forall t$
 (FGN alg. 1 ou autre)

Exercice : Caractériser les sous espaces vectoriels de $M_n(K)$, E vérifiant $(*) \forall M \in E, \text{rg}(M) \leq 1$. i.e. $\text{rg} = 0$ ou 1 .

(Prop 1) Soit $M \in M_n(K)$ tq $\text{rg}(M) = 1$. Alors il existe $X, Y \in K^n \setminus \{0\}$ tq $M = XY^T$. Réciproquement toute matrice de cette forme est de rang 1.

Preuve : Si $\text{rg}(M) = 1$ alors $M \neq 0$, l'une de ses colonnes est non nulle, notons la $X \in K^n \setminus \{0\}$, et on a $M = (y_1 X, \dots, y_m X)$ pour $Y = (y_1, \dots, y_m) \in K^m \setminus \{0\}$ (un des y_i vaut 1). On a donc bien $X, Y \in K^n \setminus \{0\}$, $M = XY^T$. La réciproque est immédiate. $\square$

(Prop 2) Soient A et A' deux matrices de $E \leq M_n(K)$ vérifiant $(*)$. Alors, si (A, A') est libre on a (X, X') libre XOR (Y, Y') libre avec $A = XY^T, A' = X'Y'^T$.

Preuve : Montrons que (X, X') libre ou (Y, Y') libre par l'absurde. Si (X, X') et (Y, Y') sont liées, alors, les vecteurs étant non-nuls on a $X' = \lambda X, Y' = \mu Y$ pour $\lambda, \mu \in K^\times$. D'où $A' = \lambda \mu A$: absurde.

• Montrons que (X, X') libre $\Rightarrow (Y, Y')$ liée. Puisque E vérifie $(*)$ on a $A + A' \in E$ et $\text{rg}(A + A') \leq 1$. Mais (A, A') libre donc $A + A' \neq 0$ et donc $\text{rg}(A + A') = 1$.

On a donc une des colonnes de $(A + A')$, disons la première, non-nulle et les autres colinéaires à elle-ci. D'où

$(y_1 X + y'_1 X', \dots, y_m X + y'_m X') = (\lambda_1 (y_1 X + y'_1 X'), \dots, \lambda_m (y_1 X + y'_1 X'))$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Or (X, X') est libre on peut donc écrire pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ $y_i = \lambda_i y_1$ et $y'_i = \lambda_i y'_1$.

Soit encore $Y = y_1 \wedge \dots \wedge y_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y' = y'_1 \wedge \dots \wedge y'_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. (Y, Y') est donc liée, ce qui conclut la preuve. $\square$

100 D1 2/3

(Def 3) Soit $Y \in K^n \setminus \{0\}$ et soit L un sev de K^n . On définit $\varphi_{L,Y} : L \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ par $\varphi_{L,Y}(X) = XY^T$. $\varphi_{L,Y}$ est linéaire et son image, notée $E_{L,Y}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant (*) d'après la prop 1.

De m si $X \in K^n \setminus \{0\}$ on définit pour $Y \in L$, $\varphi_{X,L}(Y) = XY^T$ et on note $E_{X,L}$ l'image de $\varphi_{X,L}$. C'est un sev de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant (*).

(Rem 4) $\varphi_{X,L}$ et $\varphi_{L,Y}$ sont injectives, on a donc $E_{X,L} \cup E_{L,Y} \cup L$ et en particulier $\dim(E_{X,L}) = \dim(E_{L,Y}) = \dim(L)$.

(Théorème 5) Si E est un sev de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant (*) alors E est de la forme $E_{X,L}$ pour un certain $X \in K^n \setminus \{0\}$, $L \leq K^n$ ou $E_{L,Y}$ pour un $Y \in K^n \setminus \{0\}$, $L \leq K^n$.

Preuve: Si $\dim(E) = 0$, $E = E_{X,\{0\}}$ pour $X \neq 0$. (OK)

• Si $\dim(E) = 1$, $E = \text{vect}(A)$ avec $A \neq 0$, $\text{rg}(A) = 1$ donc $E = \{ \lambda XY^T, \lambda \in K \}$ pour des $X, Y \in K^n \setminus \{0\}$
 $= \{ \varphi_{\text{vect}(X), Y}(\lambda X), \lambda \in K \} = E_{\text{vect}(X), Y}$. (OK.)

• Si maintenant $\dim(E) \geq 2$ alors il existe (A, A') libre dans E , $A = XY^T$, $A' = X'Y'^T$. On a alors (X, X') XOR (Y, Y') libre.

→ Supposons (X, X') libre et considérons $A'' = X''Y''^T \in E \setminus \{0\}$

• si (Y, Y'') est libre alors (Y', Y'') aussi puisque

(Y, Y') est liée. Mais alors (X, X'') et (X', X'') sont liés

et donc (X, X') aussi : c'est impossible, donc (Y, Y'') est liée et (X, X'') libre.

• On a $Y'' = \lambda Y$ pour un $\lambda \in K^*$ donc $A'' = \lambda X''Y^T$.

Rapporter le cas
 d'injectivité
 de $\varphi_{L,Y}$

Posons alors $\lambda X'' = u(A'')$ et $u_Y: E \rightarrow K^m, A'' \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A'' = 0 \\ u(A'') & \text{sinon} \end{cases}$ (15) M
 u est bien définie (car, pour Y fixée, l'écriture $A'' = X'' Y^T$ est unique) et linéaire. On remarque alors que
 si $L = \text{im } u$ alors $E = E_{L,Y}$.
 $\rightarrow$ Si c'est (Y, Y') qui est libre alors on obtient que
 $E = E_{X,L}$ ce qui termine la démonstration. $\square$ 3/3

(Conclusion) Les sev de $M_m(K)$ vérifiant $(*)$ sont les $E_{L,Y}$ et les $E_{X,L}$. Ils sont isomorphes à des sev de K^m en ont en particulier une dimension $\leq m$.

Unicité de u_Y : $XY^T = X'Y'^T \Rightarrow \lambda \in K^Y, \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \lambda Y \end{cases}$

Théorème - Adhérence des classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{S}_{p,q}$ l'ensemble des matrices de signature (p,q) dans $\mathcal{S}_m(\mathbb{R})$. L'adhérence de $\mathcal{S}_{p,q}$ est $\overline{\mathcal{S}_{p,q}} = \bigcup_{p' \leq p, q' \leq q} \mathcal{S}_{p',q'}$.

Déroulement de la preuve :

- On montre dans un premier temps l'inclusion $\bigcup \mathcal{S}_{p',q'} \subseteq \overline{\mathcal{S}_{p,q}}$ séquentiellement.
- Puis on montre que l'union est fermée, ce qui fournit, en prenant l'adhérence de $\mathcal{S}_{p,q} \subseteq \bigcup \mathcal{S}_{p',q'} \subseteq \overline{\mathcal{S}_{p,q}}$ la double inclusion voulue. Pour cela, on va montrer deux résultats :

→ $\mathcal{S}_{m,0} = \mathcal{S}_m^{++}$ est ouvert

→ $\mathcal{S}_{>p} = \{M \in \mathcal{S}_m, p(M) > p\}$ est ouvert.

- On conclut en écrivant l'union comme $(\mathcal{S}_{>p}) \cup (\mathcal{S}_{>q}^c)$

(Prop 1) $\bigcup \mathcal{S}_{p',q'} \subseteq \overline{\mathcal{S}_{p,q}}$

Preuve: Soit $M \in \mathcal{S}_{p',q'}$ avec $p' \leq p, q' \leq q$. D'après le théorème de Sylvester, il existe $P \in GL_m(\mathbb{R})$ tq

$$M = PDP^T \text{ avec } D = \text{diag} \left(\underbrace{1 \dots 1}_{p'}, \underbrace{-1 \dots -1}_{q'}, \underbrace{0 \dots 0}_{m-p'-q'} \right)$$

On pose alors $M_k = PD_kP^T$ avec $D_k = \text{diag} \left(\underbrace{1 \dots 1}_{p'}, \underbrace{-1 \dots -1}_{q'}, \underbrace{0 \dots 0}_{m-p-q} \right)$. Les D_k sont

de signature (p,q) car elles ont exactement p valeurs propres > 0 et q valeurs propres < 0 . L'invariance

de la signature par conjugaison assure alors que $M_k \in \mathcal{S}_{p,q}$.

En outre $D_k \rightarrow D$ donc par continuité de la multiplication dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $M_k \rightarrow PDP^T = M$.

On a donc bien $M \in \overline{\mathcal{G}_{p,q}}$ d'où l'inclusion $\square$

(B1) D2
2/3

(Lem 2) $\mathcal{G}_{m,0} = \mathcal{G}_m^{++}$ est ouvert

Preuve: On va montrer que $\mathcal{G}_{m,0}^c$ est fermé. Si $M \in \mathcal{G}_m^{++}$ et $x \in \mathbb{R}^m$ notons $M(x) = x^T M x$. $x \mapsto M(x)$ est alors continue, c'est la forme quadratique associée à M . On a $M \in \mathcal{G}_m^{++}$ ssi $\forall x \in S^{m-1}$ sphère unité de $\mathbb{R}^m$ on a $M(x) > 0$. En effet si $M > 0$ alors $\forall x \in S^{m-1}$, $x \neq 0$ donc $M(x) > 0$ et réciproquement, si $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ $\exists u \in S^{m-1}$ et $\lambda > 0$ tq $x = \lambda u$ et donc $M(x) = \lambda^2 M(u) > 0$. Soit donc $M_k \in \mathcal{G}_{m,0}^c$: $\exists u_k \in S^{m-1}$, $M_k(u_k) \leq 0$ telle que $M_k \xrightarrow{\infty} M \in \mathcal{G}_m(\mathbb{R})$. S^{m-1} est fermé borné dans $\mathbb{R}^m$ de dimension finie donc S^{m-1} est compact. On peut donc extraire $u_{p(k)}$ convergente vers un $u \in S^{m-1}$. Par continuité de M on a alors $M_{u(k)}(u_{u(k)}) \leq 0 \Rightarrow M(u) \leq 0$ et donc $M \in \mathcal{G}_{m,0}^c$ qui est donc fermé. $\mathcal{G}_{m,0}$ est ouvert $\square$.

(Prop 3) $\mathcal{G}_{>p}$ est ouvert.

Preuve: On va montrer que si $p(M) > p$ alors il existe un voisinage ouvert de M , $\mathcal{V}$, tel que $\forall M' \in \mathcal{V}$ $p(M') > p$.

Soit M tq $p(M) > p$, alors il existe $F \leq \mathbb{R}^m$ tq $\dim F = p+1$ et M_F la restriction de M à F soit > 0 .

En outre, écrire M dans une base adaptée à $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^m$ montre que $M \xrightarrow{\Psi} M_F$ est continue (changement de base + projection)

On en a montré que $\mathcal{G}_m^{++}$ est un ouvert de $\mathcal{G}_m(\mathbb{R})$ (sans restriction sur m) on a donc un voisinage ouvert U_F de M_F tq $U_F \subseteq \mathcal{G}_m^{++}$. On a donc $V := \varphi^{-1}(U_F)$ un ouvert de $\mathcal{G}_m$ contenant M et tq $V \subseteq \mathcal{G}_{>p}$. $\mathcal{G}_{>p}$ est donc bien ouvert. $\square$

(Conclusion) En remarquant que M est de signature

(p, q) ssi $-M$ est de signature (q, p) on réécrit

$$\begin{aligned} \sqcup \mathcal{G}_{p', q'} &= \{ M \in \mathcal{G}_m, p(M) \leq p \} \cap \{ M \in \mathcal{G}_m, q(M) \leq q \} \\ &= \{ M \in \mathcal{G}_m, p(M) \leq p \} \cap \{ -M \in \mathcal{G}_m, p(M) \leq q \} \\ &= \mathcal{G}_{>p}^c \cap \mathcal{G}_{>q}^c \quad \text{qui est donc fermée.} \end{aligned}$$

De là on a comme annoncé plus haut,

$$\overline{\mathcal{G}_{p, q}} \subseteq \sqcup \mathcal{G}_{p', q'} \subseteq \overline{\mathcal{G}_{p, q}} \quad \text{ce qui garantit l'égalité des ensembles.}$$