150

NOM : DURAND   Prénom : Romain   Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 150 . Exemples d'action de groupe sur les espaces de matrices

Autre sujet : Ref: Caldero, Germoni : H2G2 ← ppal pr comprendre les idées   De Seguins Pazzis : Invitation aux formes quadratiques ← co-réduction

Gourdon ; Algèbre ← + structuré

Etant donnée une action de groupe $G \curvearrowright X$, on définit les notions suivantes qui sont centrales dans cette leçon :

Def 1 : On appelle "invariant" une application constante sur les orbites de l'action. On dit qu'un invariant est total si cette application est injective

Def 2 : On appelle "forme normale" un représentant de l'orbite plus agréable à manipuler (subjectif).

I) Action par équivalence, rang.

Def 3 : Soit E de dimension n et $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(f_i)_{1\le i\le n}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de (e_i) vers (f_i) la matrice $P = (e_i^*(f_j))_{i,j} \in GL_n(\mathbb{K})$.

Prop 4 : (Changement de base). Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soient $(e_i)_{1\le i\le n}$ et $(e_i')_{1\le i\le n}$ deux bases de E, P la matrice de passage de (e_i) vers (e_i'), et $(f_i)_{1\le i\le m}$, $(f_i')_{1\le i\le m}$ deux bases de F, Q la matrice de passage de (f_i) vers (f_i'). Alors en notant A la matrice de f entre (e_i) et (f_i) et A' celle de f entre (e_i') et (f_i'), on a
$$A' = Q^{-1}AP$$

Def 5 : On dit que $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi elles représentent la même application linéaire dans des bases éventuellement différentes.

Def 6 : $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright M_{mn}(\mathbb{K})$ par $(Q,P) \to QAP^{-1}$.

Rq 7 : Les orbites sous cette action correspondent à la relation d'équivalence précédente.

Def 8 : On définit le rang de $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ comme le rang de l'application linéaire qu'il représente. C'est un invariant.

Prop 9 : Le rang est un invariant total. Une forme normale pour les matrices de rang r est $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ (r)

Appli 10 : M et ${}^tM$ ont même rang.

Appli 11 : (Formule du rang). Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$

Cas particulier : action par multiplication et pivot de Gauss

Def 12 : $GL_m(\mathbb{K}) \curvearrowright \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $P \cdot A = PA$.

Def 13 : (Matrices élémentaires). Pour $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$, on définit les matrices de transvection $A_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, les matrices de permutations $T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et les matrices de dilatation $D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Prop 14 : Ces matrices engendrent $GL_m(\mathbb{K})$. De plus, en notant (L_i) les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la multiplication par ces matrices revient à effectuer les opérations suivantes : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ et $L_i \leftarrow \alpha L_i$. Ces opérations préservent le noyau de A.

Rq 15 : De même, on peut agir sur les colonnes par $P \cdot A = A\,{}^tP$ pour $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Prop 16: (Pivot de Gauss). Une forme normale de l'action $P.A = PA$ est $r \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \right.$. Cela donne une méthode pour calculer le rang de A.

Ex 17: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

II) Action par similitude : réduction d'endomorphismes

def 18: $GL_n(K) \curvearrowright M_n(K)$ par $P.A = PAP^{-1}$

Prop 19: Le rang, la trace, le déterminant, les polynômes minimaux et caractéristiques sont des invariants.

Contre-ex 20: Ils ne sont pas totaux : $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right)$ ne sont pas semblables.

Def 21: On dit que A est diagonalisable (resp. trigonalisable) si A est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Prop 22: (Lemme des noyaux). Si $P = P_1 \cdots P_r \in K[X]$ et les P_i sont premiers entre eux, alors pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Ker} P(f) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} P_i(f)$

Prop 23: Sur $K = \mathbb{C}$, toutes les matrices sont trigonalisables.

Prop 24: (Réduction simultanée) × Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de matrices diagonalisables qui commutent, alors les A_i sont simultanément diagonalisables.
× Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $[u,v] \in \operatorname{Vect}(u,v)$, alors u et v sont co-trigonalisables.

Prop 25: Le spectre ($\in K^n/\mathfrak{S}_n$) est un invariant total pour les matrices diagonalisables.

Invariants de similitude

Def 26: Soit $P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in K[X]$. Sa matrice compagnon est $\begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Def 27: (Polynôme minimal ponctuel). Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note P_x le générateur unitaire de $\{P \in K[X],\ P(f)(x) = 0\}$.

Rq 28: Si $d^\circ P_x = k$, et $F = \operatorname{Vect}(x, \ldots, f^{k-1}(x))$, alors $\operatorname{Mat} f_{|F} = C_{P_x}$ dans cette base.

Def 29: On dit que f est cyclique si $\pi_f = \chi_f$, ce qui équivaut à dire que dans une certaine base, la matrice de f est C_{π_f}.

Prop 30: Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $x \in E$ tel que $\pi_f = P_x$.

Thm 31: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\exists F_1, \ldots, F_r$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, et que si $f_i = f_{|F_i}$, les f_i soient cycliques et si $P_i = \pi_{f_i}$, $P_{i+1} | P_i$. Les P_i sont uniques et sont appelés invariants de similitude.

que 3ce
Dvp 1
H2G2 + Gou

Cor 32: Toute matrice est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ et
A et B sont semblables ssi elles ont même invariants de similitude.

Appli 33: Dans $\mathcal{M}_n(K)$, $n \leq 3$, deux matrices sont semblables ssi elles ont même polynômes caractéristique et minimal.

Appli 34: Si $\begin{matrix} \mathbb{L} \\ | \\ \mathbb{K} \end{matrix}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, et A et B semblables sur $\mathbb{L}$, alors elles sont semblables sur $\mathbb{K}$.

Csq 35: (Théorème de Jordan). Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotente. Alors $\exists! (v_1, \ldots, v_r)$ suite décroissante d'entiers tels que $\sum_{i=1}^{r} v_i = n$ et $A \sim \begin{pmatrix} J_{v_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{v_r} \end{pmatrix}$ où $J_p = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$

Rq 36: On peut calculer explicitement les v_i en regardant les tableaux de Young associés à $k_i = \dim \operatorname{Ker} A^i - \dim \operatorname{Ker} A^{i-1}$

Cas particulier : changement de base orthonormée.

Rq 37 : $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$: $P.M = PMP^{-1}$ correspond à un changement de base orthonormée
L'action de $O_n(\mathbb{R})$ stabilise $S_n(\mathbb{R})$

Thm 38 (Théorème spectral) : Toute matrice symétrique est ortho-diagonalisable, i.e pour tout endomorfisme autoadjoint, il existe une base orthonormée telle que sa matrice dans cette base est diagonale.

Dvp2 Appli 39 : $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homeomorphisme.

Appli 40 : (Cochran). Si $X_1, \dots X_n$ sont des lois normales indépendantes, alors $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien. Réciproquement, si $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien, il provient d'un certain $(Y_1, \dots Y_n)$ où les Y_i sont des lois normales independantes et chaque Y_i est combinaison linéaire des X_i

Appli 41 : Matrices d'inertie d'un solide : il existe des axes de rotation privilégiés tels que les produits d'inertie soient nuls.

III) Action par congruence et formes bilinéaires /quadratiques

Def 42 : $GL_n(K) \curvearrowright M_n(K)$ par $P.A = PA{}^tP$: matrices congruentes

Prop 43 : Deux matrices sont congruentes ssi elles représentent la même forme bilinéaire.

Action sur $S_n(K)$, car $K \neq 2$

Def 44 : Pour une forme quadratique q réelle, on note $p(q) = \max\{\dim F,\ F \subset E,\ q(x) > 0\ \forall x \in F \setminus \{0\}\}$ et pour une forme quadratique quelconque, son discriminant δ est la classe de son déterminant pour la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in K^*;\ x = y a^2$.

Prop 45 : Le rang, p et le discriminant δ sont des invariants.

Thm 46 : i) Si $K = \mathbb{C}$, $A, A' \in S_n(\mathbb{C})$, alors $Orb(A) = Orb(A') \Leftrightarrow rg\,A = rg\,A'$
Une forme normale est $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

ii) Si $K = \mathbb{R}$, $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$, alors $Orb(A) = Orb(A') \Leftrightarrow \begin{array}{l} rg\,A = rg\,A' \\ p(A) = p(A') \end{array}$
Une forme normale est $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ($rg\,A$; $n - p(A)$)

iii) Si $K = \mathbb{F}_q$, q impair, $A, A' \in GL_n(\mathbb{F}_q) \cap S_n(\mathbb{F}_q)$ vérifient $Orb\,A = Orb\,A' \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$
Une forme normale est $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ où même $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_i \in \{1, \xi\}$ où ξ est un non carré dans $\mathbb{F}_q$.

Géréduction :

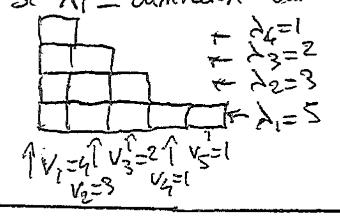
Thm 47 (Théorème spectral pour les formes quadratiques)
Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$; $\begin{array}{l} A = {}^tP.P \\ B = {}^tPDP \end{array}$ avec D diagonale.

Appli : chercher le max de $\frac{q'}{q}$, q, q' fmes quadr.

Ex 48 : Si $A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(A+B) \geq \det A + \det B$.

Annexe : tableau de Young

Si $\lambda_i = \dim \ker A^i - \dim \ker A^{i-1}$, λ_i est décroissante et on peut lire les ν_i comme la partition duale :



(150)

Leçon 150 : Exples d'ac° de gpe s/ les espaces de matrices

I. Questions dvt 1

- Dire un mot s/ l'unicité
- Est-ce que la méthode présentée est constructive ?
  ↳ Non. Sur $\mathbb{C}$ il y a moyen de faire d'autres méthodes qui sont constructives (tableaux de Young, noyaux itérés)
  Si on sait trouver x, $\Pi x = B$ alors c'est gagné !

II. Question plan

- Cmt on montre que le rg est un inv pour la rela° d'éq ?
  ↳ En passant par l'appli lin
  Pivot de Gauss : conserve le noyau et l'image
- Orbites de l'ac° par multiplication à gauche ?
  ↳ 1ère rq : si les mats sont inv, elles sont ds la m̂ orbite :
  $P = PP'^{-1}P'$
  Si 2 mat ont le m̂ noyau ⇝ on se ramène à des mat inv
  (on décomp $E = \ker(\Pi) + F$, Π inv s/ F).
  Donc le noyau est un invariant total

Pr la mult à dte, l'invariant total c'est l'image

Par la rela° de sim, est-ce que la dimension des esp propres est un invariant total ?
  ↳ Non. Ne donne aucune info s/ la nilpotence.
  Exple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (m̂ pas m̂ poly χ)
  1 et 2 $\subseteq$ sp. de dim 1

- Cmt on applique le dvt 2 à Cochran et aux mat d'inertie ?
- Donner un exple où le discriminant est un invariant total

$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ $\varepsilon_i \in \{1, \xi\}$ $\qquad$ $\varepsilon \in \{1, \xi\}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1_{\varepsilon} \end{pmatrix}$

Si les mat ne sont pas inv, discriminant $= 0$ → on ne peut rien en dire.

- Expliquer à quoi sert le thm spectral pour les formes quadr.
  - ↳ Réaliser un pdt scalaire
  - On peut trouver une base où l'une est orthonormée et l'autre orthogonale.

à mettre ds le plan → - Une matrice et sa transposée ⇒ similitude ?
  - ↳ Semblables. On peut le prouver en passant par la réduction de Jordan car [illegible] ~ [illegible]

×(exp)(?) ds un corps alg clos + [illegible] (ext° finie)

Et sans passer par la réduction de Jordan ?
  - ↳ Par inv. de similitude

III Exercices

- Sig dans $M_n(K)$ on a tj une mat diag ds l'adhérence de la classe de conjugaison (similitude)

IV Commentaire

- Défense de plan/plan : Bien. Bonne idée de parler des inv et des formes normales. Important de parler de chgt de base orthonormée, applica° intéressante.
- Dvt 1 : Bien. C'est tout ds l'algèbre lin. Ds savoir que ce qui fait tout marcher derrière c'est les modules
- Questions : Connaître les orbites des actions par mult à g et à dte.
- Peut parler de : les divisions élémentaires (→ remplace [illegible])
- Dvts possibles : les matrices échelonnées (ac° par mult à g)