NOM : UMBER Prénom : Pierre Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un espace vectoriel complexe

Autre sujet : Anneaux principaux. Applications (107)

I. Représentation d'un groupe fini

1) Définition d'une représentation

Soit G un groupe fini.

Def 1 : Une représentation de G (sur $\mathbb{C}$) est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et d'une action de G sur V telle que : $\forall g \in G$, $x \mapsto g\cdot x$ est $\mathbb{C}$-linéaire

Prop 2 : Une représentation de G revient à considérer $\rho : G \to Gl_{\mathbb{C}}(V)$ morphisme de groupes.

On notera (V,ρ) la représentation.

Ex 3 : . La représentation nulle, lorsque $V = \{0\}$

. La représentation triviale : lorsque $V = \mathbb{C}$ et $\rho : g \in G \mapsto 1 \in \mathbb{C}^*$. On la note $\mathbb{1}$.

Prop 4 : Soit (V,ρ) et $(W,\tilde{\rho})$ deux représentations. On peut alors construire les représentations suivantes :

. Somme directe : $V \oplus W$, où $g\cdot(x \oplus y) = (g\cdot x) \oplus (g \cdot y)$

. Produit tensoriel : $V \otimes_{\mathbb{C}} W$, où $g\cdot(x \otimes y) = (g\cdot x) \otimes (g\cdot y)$

. Morphisme : $Hom_{\mathbb{C}}(V,W)$, où $g\cdot f : x \mapsto g\cdot(f(g^{-1}\cdot x))$

. Dual : V^* où $g\cdot l : x \mapsto l((g^{-1})x)$

. On suppose X fini et $G \curvearrowright X$. On pose $V_X := \bigoplus_{x\in X} \mathbb{C}\cdot e_x$ et $g\cdot e_x := e_{g\cdot x}$. Alors on a une représentation sur V_X, dite associée à $G \curvearrowright X$

Ex 5 : $G \curvearrowright G$ par translation à gauche (action régulière). On note R_G la représentation associée, dite représentation régulière. De plus, cette représentation est fidèle. (ρ_{R_G} injective)

2) Morphismes et sous-espaces stables

Def 6 : Soit $f \in Hom_{\mathbb{C}}(V,W)$. On dit que f est G-linéaire si : $\forall g \in G, \forall x \in V$, $g\cdot f(x) = f(g\cdot x)$.

On note $Hom_G(V,W)$ l'ensemble des applications

Prop 7 : $Hom_G(V,W)$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $Hom_{\mathbb{C}}(V,W)$

Prop 8 : On a $Hom_G(V,W) = Hom_{\mathbb{C}}(V,W)^G$

Prop 9 : la composée de deux applications G-linéaires est G-linéaire. On définit alors la notion de G-isomorphisme et G-isomorphie de manière habituelle. Si V et W sont G-isomorphes, on note $V \underset{G}{\simeq} W$

Ex 10 : . On a $V^* \underset{G}{\simeq} Hom_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est muni de la représentation triviale

. Si $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, $Hom_{\mathbb{C}}(V,W) \underset{G}{\simeq} V^* \otimes_{\mathbb{C}} W$

Def 11 : Soit $W \subset V$ sous-espace. W est G-stable si : $\forall g \in G$, $\rho(g)(V) \subset V$.

Ex 12 : $\{0\}$, V^G et V sont des sous-espaces G-stables.

3) Représentations irréductibles

Def 13 : La représentation (V,ρ) est irréductible si les seuls sous-espaces stables de V sont $\{0\}$ et V

Ex 14 : Les représentations de dimension 1 sont irréductibles.

Prop 15 : Si G est abélien, les seules représentations irréductibles de G sont de dimension 1

Prop 16 : les représentations irréductibles sont de dimension finie

Lemme 17 (Schur) : Soit (V,ρ) et $(W,\tilde{\rho})$ deux représentations irréductibles. Alors : $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V,W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq_G W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Cor. 18 : Si (V,ρ) est irréductible, alors $\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(I_d)_V$

Lemme 19 : On suppose $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ et soit $W \subset V$ sous-espace G-stable. Alors W admet un supplémentaire G-stable dans V. (Maschke)

Cor 20 : Si $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, alors $V = m_1 V_1 + \dots m_r V_r$ de manière unique où les V_i sont irréductibles

II. Caractère d'une représentation

1) L'espace $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$

Prop 21 : $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $|G|$.

Def 22 : Si $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(G,\mathbb{C})$, on pose $\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g)$

Prop 23 : $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit hermitien

Prop. 24 : l'action régulière sur G induit une action sur $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ donnée par $g \cdot \alpha : h \mapsto \alpha(g^{-1}h)$. Alors : $\langle g\cdot\alpha, g \cdot \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$

On dit que le produit scalaire est G-invariant

Prop. 25 : l'action de conjugaison sur G induit une action sur $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ donnée par $g\cdot\alpha : h \mapsto \alpha(g^{-1}hg)$.

Def 26 : pour cette action, on pose $\mathcal{C}(G,\mathbb{C}) := \mathcal{F}(G,\mathbb{C})^G$: ensemble des fonctions centrales

Prop 27 : On a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(G,\mathbb{C})$ égal au nombre des classes de conjugaison de G

2) Caractère d'une représentation (V,ρ), avec $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$

Def 28 : On pose $\chi_V : g \in G \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$: caractère associé à (V,ρ)

Prop 29 : $\chi_V \in \mathcal{C}(G,\mathbb{C})$

Prop 30 : avec les notations de la proposition 4, on a :

- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
- $\chi_{V \otimes_{\mathbb{C}} W} = \chi_V \chi_W$
- $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$
- $\chi_{V_*}(e) = |G|$

Ex 31 : On a $\chi_{R_G}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ex 32 : Les caractères de dimension 1 sont les morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$

3) Vers le théorème de Frobenius

On suppose $V = m_1 V_1 + \dots + m_r V_r$ décomposition en représentations irréductibles

Lemme 33 : $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ est un projecteur G-linéaire d'image V^G

Cor. 34 : On a :
$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V,W)$$
$$\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle = m_i$$
$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \textstyle\sum_i m_i^2$$

Cor 35 : le caractère détermine la représentation

Lemme 36 (Schur) : la famille (χ_{V_i}) est orthonormée. En particulier, il y a au plus $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}(G,\mathbb{C})$ représentations irréductibles.

Cor 37 : (V,ρ) est irréductible $\Leftrightarrow \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

App 38 : Si χ est un caractère irréductible (c'est-à-dire issu d'une représentation irréductible) et $\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$, alors $\chi\varphi$ est un caractère irréductible.

Prop 39: On a $R_G = \sum_i (\dim_{\mathbb{C}}(V_i)) V_i$

Cor 40 (formule de Burnside): On a $|G| = \sum_i (\dim V_i)^2$

Th 41 (Frobenius): $\{\chi_{V_i}\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(G,\mathbb{C})$.

III Applications

1) Table de caractères

Def 42: On appelle table de caractères de G la table $(\chi_i(g_j))$ où les χ_i sont les caractères irréductibles de G et les g_j des représentants des classes de conjugaison de G

Rem 43: La connaissance de $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$ permet de remplir le tableau

Ex 44: Si $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, alors, si $\xi_m := \exp(\frac{2i\pi}{m})$, on a, pour $0 \leq k \leq m-1$, $\chi_k(\bar{m}) = \xi_m^{km}$

Ex 45: On peut construire les tables de $\mathfrak{S}_3$, D_4 et $\mathbb{H}_8$ facilement

Prop 46: Si $G = \mathfrak{S}_n$, l'action $G \curvearrowright \{1,\dots,n\}$ induit une représentation sur $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}e_i$, alors, si $D = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(e_1+\dots+e_n)$, alors D est $\mathbb{C}$-stable, et admet un supplémentaire G-stable H (donné par $\{(x_i), \sum x_i = 0\}$), alors χ_H fournit un caractère irréductible, et l'on a $\chi_H(\sigma) = |\mathrm{Fix}(\sigma)| - 1$ (caractère standard)

App 47: table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Rem 48: l'étude des isométries du tétraèdre permet aussi de déterminer la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

2) Simplicité et caractère:

DEV 1

DEV 1: Soit $H \subset G$ sous-groupe, $\chi_1,\dots,\chi_r$ les caractères de G irr.

Alors: i) $H \triangleleft G \iff \exists I \subset \{1,\dots,r\}$, $H = \bigcap_{i\in I} K_{\chi_i}$ où $K_{\chi_i} = \{g \in G, \chi(1) = \chi(g)\}$

ii) G est simple $\iff \forall \chi$ car. irr. non trivial, $\forall g \in G - \{e\}$, $\chi(g) \neq \chi(1)$

3) Le groupe dual

Def 49: On pose $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$: groupe dual de G

Prop 50: On a $\widehat{G \times H} \simeq \widehat{G} \times \widehat{H}$

Prop 51: $\phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$, $k \mapsto (m \mapsto \xi_m^{km})$ est un isomorphisme de groupes

App 52: Si G est abélien, $\widehat{G} \simeq G$

Ex 53: Si p est premier impair, alors $\widehat{\mathbb{F}_p^*}$ est cyclique d'ordre $p-1$, et l'unique élément d'ordre p est $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ (symbole de Legendre) où $\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est un carré mod } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Prop 54: Dans le cas général, on a $\widehat{G} \simeq \mathrm{Ab}(G) = G/D(G)$

Ex 56: $\widehat{\mathfrak{S}_4} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Prop 57: Si G est abélien et $H \subset G$ est un sous-groupe, alors tout caractère $\chi \in \widehat{H}$ se prolonge en $\chi \in \widehat{G}$

App 58: Si G est abélien fini, alors il existe une unique suite $m_1 | \dots | m_r$ telle que $G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$

4) Le théorème de Molien

DEV 2

DEV 2: Soit G groupe fini, $(\mathbb{K}^n, \rho)$ une représentation. Cette représentation induit une représentation sur $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n] =: A$ par $g \cdot P = P \circ g^{-1}$. On note $A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k$ décomposition de A en composantes homogènes. Les A_k sont G-stables, on note alors (A_k, ρ_k) la représentation induite et on pose $a_k := \dim_{\mathbb{C}} A_k^G$

alors $\sum_{k\geq 0} a_k X^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(\mathrm{Id} - \rho(g)X)}$

Annexe : ① table de caractères

	1 e	k_2 g_2	$\dots$ $\dots$	k_r g_r
$\mathbb{1}$				
χ_2				
$\vdots$		$\chi_i(g_j)$		
χ_r				

Ici, k_i est le cardinal de l'orbite de g_i pour la relation de conjugaison

① On met des 1 sur la première ligne

② la première colonne est la dimension de la représentation

③ On remplit les représentations de dimension 1 avec l'aide de $\widehat{G}$

④ On utilise les relations d'orthogonalité

② $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

	1 $\bar{0}$	$\dots$	1 $\overline{m-1}$
$\mathbb{1}$			
χ_1			
$\vdots$		ζ_m^{ij}	
χ_{m-1}			

Où $\chi_k : \bar{m} \mapsto \zeta_m^{km}$

③ $\mathfrak{S}_4$

	1 Id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
standard	3	1	0	-1	-1
ε standard	3	-1	0	1	-1

④ $\mathfrak{S}_3$

	1 Id	(12)	(123)
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
standard	2	0	-1

⑤ D_4

	1 Id	1 r^2	2 r	2 s	2 sr
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_1'	1	1	-1	-1	1
χ_1''	1	1	-1	1	-1
χ_2	2	-2	0	0	0

⑥ $\mathbb{H}_8$

	1 1	1 -1	2 i	2 j	2 k
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1
χ_1'	1	1	-1	-1	1
χ_1''	1	1	-1	1	-1
χ_2	2	-2	0	0	0