

Proposition 9: Pour tout $g \in G$, $\chi(g)$ est diviseur de $\chi(1)$, de valeurs propres des racines de χ divisibles.

Définition 10: La caractériste associée à (V, ρ) est l'application $\chi_V: g \mapsto \text{tr}(\rho(g)) \in \mathbb{C}$. On dit que χ_V est irréductible si $V \neq 0$ est.

Exemple 11: Tout morphisme de groupes $\varphi: G \rightarrow G'$ est un caractère. La notation est fautive au général.

• En reprenant la même notation de l'exemple 2, $\chi(g)$ est le nombre de points fixes de $\rho(g)$.

Propriété 12: $\chi_V(1) = \dim V$; $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$; $\chi_V(g h g^{-1}) = \chi_V(h)$;
 $\chi_{V \oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$; $\chi_{\text{Hom}(V, V')} = \chi_V \chi_{V'}$.

Définition 13: $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction caractéristique pour l'anneau $\mathcal{R}(G)$ si $f(g h g^{-1}) = f(h)$. On note $\mathcal{R}_c(G)$ l'anneau des classes de conjugaison de G .

Proposition 14: $\mathcal{R}_c(G)$ est un $\mathbb{C}$ -en de dimension finie, de base (π_i) où π_i parcourt les classes de conjugaison de G .

Définition 15: On définit $\chi_c(G)$ du produit scalaire: $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{\text{Card } G} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}$.

Proposition 16: En ne prenant la notation de $\mathcal{R}_c$, $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ pour une famille orthogonale de $\mathcal{R}_c$.

Corollaire 17: Deux représentations d'un même caractère sont isomorphes.

Corollaire 18: $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si χ est irréductible. Plus généralement $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^n m_i^2$ si $\chi = \sum_{i=1}^n m_i \chi_i$.

Corollaire 19: Les N_i sont en nombre fini.

Exemple 20: Si (V, ρ) est la représentation régulière de G alors $V = \bigoplus_{\alpha \in I} V_\alpha$ et $\chi = \text{Card } G$.

Théorème 21 (Frobenius): Les caractères de G forment une base de $\mathcal{R}_c(G)$.

Corollaire 22: Il y a au plus de caractères (no de classes de conjugaison) de G . On note $\text{Card}(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison de G .

Définition 23: La table des caractères de G est la table des $\chi_V(e)$ pour $\alpha \in I$ et c classe de conjugaison de G .

a) Propriétés utiles pour remplir une table des caractères

Proposition 24: $\text{Card } G = \sum_{\alpha \in I} \dim V_\alpha^2 = \sum_{\alpha \in I} \chi_V(\alpha)^2$.

Définition 25: Si (V, ρ) est irréductible, $\chi_V(1) = \dim V$.

Proposition 26: Si $\chi_1 \neq \chi_2$ sont irréductibles, $\sum_{c \in \text{Card}(G)} \chi_1(c) \chi_2(c) = 0$; $\sum_{c \in \text{Card}(G)} \chi(c) \chi(c) = \text{Card}(G)$.

Si $c \neq c'$ $\in \text{Card}(G)$ alors $\sum_{\chi \in I} \chi(c) \chi(c') = 0$.

Exemples 27: Les tables des caractères de $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6$ sont les suivantes.

Définition 28: χ est isomorphe au caractère des automorphismes réguliers et χ est isomorphe au caractère des automorphismes réguliers.

Exemple 29: Si χ est un caractère régulier de G , alors $\chi(1) = \text{Card } G$.

Proposition 30: Si χ est un caractère régulier de G , alors $\chi(1) = \text{Card } G$.

Proposition 29: G est simple $\Leftrightarrow$ toute représentation irréductible non triviale de G est fidèle (c'est que ρ est injectif).

Corollaire 30: G est simple $\Leftrightarrow$ pour tout caractère irréductible χ et tout $g \neq 1$, $\chi(g) \neq \chi(1)$.

3) Exemple d'identification des représentations et caractères en fonction des groupes.

Lemme 31 (admis): Soit (V, ρ) une d -différence, $d = \dim V$. Si $g \in G$ est tel que $\chi(g) \neq 0$ et $\chi(g) \neq 1$ (où $\chi(g)$ est la cardinalité de la classe de conjugaison de g), alors $\rho(g)$ est une homothétie.

Conséquence 32: Si il existe $g \neq 1$ tel que $\chi(g) = \rho^{\chi}(\rho(g))$, alors il existe $N \triangleleft G$ propre tel que $g \bmod N \in Z(G/N)$.

Conséquence 33: Tout groupe d'ordre p^2 avec p premier est soit abélien admettant un sous-groupe distingué non trivial, soit non abélien admettant un sous-groupe distingué non trivial.

Lemme 34 (théorème de Burnside sur les groupes résolubles): Tout groupe d'ordre $p^2 q^2$, p, q premiers, est résoluble.

* G est résoluble s'il existe $1 = G_0, G_1, \dots, G_{m-1}, G_m = G$ tels que :

- 1. $G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{m-1} \triangleleft G_m$
- 2. pour tout $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, G_i / G_{i-1} est abélien

4) Cas d'un groupe abélien transformé de Fourier.

Définition 35: (produit de convolution) Si G est un groupe fini, on définit pour $f, g \in R(G)$, $f * g: h \in G \mapsto \sum_{xy=h} f(x)g(y)$.

Propriété 36: $(R(G), *)$ est un anneau associatif, commutatif, unitaire d'unité δ_1 .

Jusqu'à la fin, G est un groupe fini.

Proposition 37: Si G est abélien, $R(G) = \mathbb{C}[G]$, et les caractères sont exactement les idéaux premiers de $R(G) = \mathbb{C}[G]$.

Notation 38: On note $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ l'ensemble des caractères de G .

Propriété 39: On a $\widehat{\widehat{G}} = G$.

Définition 40 (transformée de Fourier): Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on définit $\widehat{f}: \chi \in \widehat{G} \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\chi(g)$.

Propriété 41: Pour $f, g \in \mathbb{C}[G]$, on a $\widehat{f * g} = \widehat{f} \times \widehat{g}$.

Propriété 42: (Inversion de Fourier) Si $f \in \mathbb{C}[G]$, on a $f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi$.

Remarque 43: Cette transformée de Fourier permet de multiplier deux polynômes P, Q en $\mathbb{C}[m \log m]$.

opère avec $m = \deg P + \deg Q$.

Annexe - plan de travail de construction

Z/nZ	0	1	2	...	$n-1$
χ_1	1	1	1	...	1
χ_2	1	ω_n	ω_n^2	...	ω_n^{n-1}
χ_3	1	ω_n^2	ω_n^4	...	$\omega_n^{2(n-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_n	1	ω_n^{n-1}	$\omega_n^{2(n-1)}$	...	$\omega_n^{(n-1)^2}$
					$\varepsilon_{\chi_{Std}}$

$$(w_n = e^{2i\pi/n})$$

O_3	Id	(12)	(123)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

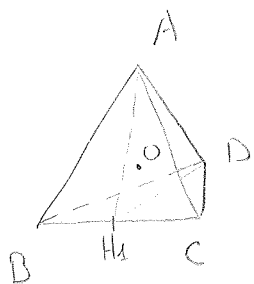
O_4	Id	6	8	6	3
		(12)	(123)	(1234)	(12434)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_{Std}	3	-1	0	1	-1

$\mathcal{A}_5$	1	20	15	12	12
		(123)	(12)(34)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3'	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_{Std}	4	1	0	-1	-1
χ_5	5	-1	-1	0	0

$\mathcal{D}_8$	1	1	2	2	2
		$\{r^2\}$	$\{r^4, r^6\}$	$\{sr, sr^3\}$	$\{s, sr^2\}$
1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

H_8	1	1	2	2	2
			$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Développement 2) (Isométries du tétraèdre et table de caractères)



• $\varphi: \text{Isom}(T) \rightarrow G_4$

1) a φ isomorphe.

* φ_{inj} : si $\varphi(f) = \text{Id}$, f stabilise A, B, C, D donc un repère affine de $\mathbb{R}^3$ donc $f = \text{id}$.

* φ_{surj} : G_4 est engendré par les transpositions. Si σ est une réflexion selon le plan (ADH) , $\varphi(\sigma)$ est une transposition. En générant à toutes, toutes les transpo sont du Imp .
Donc $\text{Im } \varphi = G_4$.

• Table de caractères

	G_4	id ^①	(12) ^⑥	(123) ^⑧	(1234) ^⑥	$(12)(34)$ ^③
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	0	1	-1

φ implique un caract. irréd. χ G_4 . $\chi_3 = \text{tr}(\varphi^{-1})$.

- id: $\chi_3(\text{id}) = 3$.

- (12): refl. selon un plan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi_3((12)) = 1$.

- (123): rotation selon un axe $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ 0 & \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}$. $\chi_3((123)) = 1 + 2\cos 2\pi/3 = 0$.

- (12)(34): sym. selon une dte $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\chi_3((12)(34)) = -1$.

- (1234): $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ds (OA, OB, OC) . $\chi_3((1234)) = -1$.

Vérifions que χ_3 irr: $\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{1}{24} (1 \times 3^2 + 6 \times 1 + 8 \times 0 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1)^2) = 1$. OK

(irr si $\langle \chi, \chi \rangle = 1$). (en fait $\langle \chi, \chi \rangle = \# \{ \text{repr. irréd. de } \chi \}$.)

Degré d'une représentation irréductible

Précision: Pour toute représentation irréductible V de degré d de G , $d \mid \text{Card}(G)$

Lemme 1: Soit $f \in R_{\mathbb{C}}(G)$, $\pi_f \in \text{GL}(V)$ définie par

$$\pi_f = \sum_{s \in G} f(s) \rho_V(s)$$

Alors π_f est une homothétie

Lemme 2: Soit $f \in R_{\mathbb{C}}(G)$, à valeurs dans les entiers algébriques. Alors $\frac{1}{d} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s)$ est entier algébrique.

Démonstration du lemme 1:

$$\text{Si } t \in G, v \in V, \pi_f(t.v) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_V(s)(t.v)$$

$$= \sum_{s \in G} f(s) \rho_V(s)(\rho_V(t)(v)) = \sum_{s \in G} f(s) \rho_V(st)(v)$$

$$\xrightarrow{u=st} = \sum_{u \in G} f(tu t^{-1}) \rho_V(tu)(v) = \rho_V(t) \left(\sum_{u \in G} f(u) \rho_V(u)(v) \right)$$

$$= \rho_V(t) (\pi_f(v)) = t \cdot \pi_f(v)$$

Donc $\pi_f \in \text{GL}(V)$ est une fonction G -linéaire, donc c'est une homothétie (par Schur) et par conséquent

$$\text{est } \frac{1}{d} \chi(\pi_f) = \frac{1}{d} \sum_{s \in G} f(s^{-1}) \chi(s)$$

$$= \frac{\text{Card}(G)}{d} \langle f, \chi \rangle$$

Démonstration du lemme 2:

$R_{\mathbb{Z}}(G)$ est un $\mathbb{Z}$ -module de type fini, car engendré par les χ_C où C parcourt les classes de conjugaison de G .

On voit $(R_Z(G), +, *)$ comme un anneau unitaire (d'unité δ_e), associatif, commutatif.

Pour $f \in R_Z(G)$, on définit $O(f) = \sum_{s \in G} f(s) \rho(s)$.

Par le lemme 1, $O(f)$ est une hermitique. On peut donc définir une application $O: R_Z(G) \rightarrow \mathcal{H}$ que l'on identifie par abus de notation à O (on fait $\tilde{O}f = \frac{1}{d} \text{Tr}(\sum_{s \in G} f(s) \rho(s)) = \frac{1}{d} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s)$). O définit alors un morphisme d'anneaux, car :

$$O(f * g) = \sum_{s \in G} \sum_{u, v \in G} f(u) g(v) \rho(s)$$

$$= \sum_{s \in G} \sum_{u, v \in G} f(u) \rho(u) g(v) \rho(v)$$

$$= \sum_{(u, v) \in G^2} f(u) \rho(u) g(v) \rho(v)$$

$$= \left(\sum_{u \in G} f(u) \rho(u) \right) \left(\sum_{v \in G} g(v) \rho(v) \right)$$

$$= O(f) O(g)$$

Ainsi $O(R_Z(G))$ est un sous-anneau de $\mathcal{H}$ qui est un $\mathbb{C}$ -module de type fini.

Autrement dit, les éléments de $O(R_Z(G))$ sont des entiers algébriques. En particulier, pour toute classe de conjugaison C de G , $O(1_C)$ est entier algébrique et donc par linéarité, si O_G est l'ensemble des entiers algébriques, pour toute $f \in R_Z(G)$, $O(f)$ est entier algébrique, c'est-à-dire $\frac{1}{d} \sum_{s \in G} f(s) \chi(s)$ est entier algébrique.

Finalement, $\chi \in R_{\mathbb{C}}(G)$ ($\chi(g)$ est une somme de racines de l'unité) et donc $\frac{1}{d} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi(g) = \frac{1}{d} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$ est entier algébrique, d'où comme $\frac{1}{d} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi(g) \in \mathbb{Z}$, on a $\frac{1}{d} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi(g) \in \mathbb{Z}$.