114

NOM : Pellet-Mary Prénom : Alice Jury :

[✓ Algèbre] ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Autre sujet :

⚠ Hypothèses p/t un peu approximatives

Dans la suite, sauf indications contraires, K désigne un corps quelconque et E est un K-espace vectoriel de dimension finie n.

⚠ pb on a bs de car ≠ 2.

I) Etude du groupe $GL(E)$:

1) Motivation et premières propriétés :

Def 1 : On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ le groupe des K-automorphismes de E.

Def 2 : On note $GL_n(K)$ le groupe des matrices $n\times n$, inversibles, à coefficients dans K.

[Pe] **Rq 3** : La donnée d'une base de E définit un isomorphisme (non canonique) entre $GL(E)$ et $GL_n(K)$. Cela nous donne un outil pour étudier $GL(E)$: le calcul matriciel.

Prop 4 : $\det : GL(E) \to K^*$ est un morphisme de groupe non trivial. Son noyau est le groupe spécial linéaire $SL(E)$. C'est un sous-groupe distingué et non trivial de $GL(E)$ (si $n \geq 2$).

Prop 5 : $GL(E)$ est produit semi-direct de $SL(E)$ par K^*.

[Co] **Prop 6** : On a un morphisme de groupe injectif φ de l'ensemble S_n des permutations de n éléments dans $GL_n(K)$ via les matrices de permutations. De plus, $\det\circ\varphi = \varepsilon$ (morphisme de signature).

Corollaire 7 (Cayley) : Tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(K)$.

2) Pivot de Gauss et générateurs de $GL_n(K)$ / $SL_n(K)$:

[Co] **Def 8** : On appelle matrice de dilation toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} j$, notée $D_j(\lambda)$, pour $\lambda \in K^*$.

Def 9 : On appelle matrice de transvection toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ i, j, notée $T_{ij}(\lambda)$, pour $\lambda \in K^*$.

Rq 9.5 : $T_{ij} \in SL_n(K)$

Théorème 10 (pivot de Gauss) : Soit $A \in GL_n(K)$, en multipliant A à gauche par un nombre fini de matrices de transvections, on peut se ramener à une matrice $D_n(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in K^*$ (voir annexe 1).

Corollaire 11 :
- $GL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection et de dilation.
- $SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvection.

Appl 12 : Le pivot de Gauss permet de tester si $A \in M_n(K)$ est dans $GL_n(K)$, de calculer $\det(A)$, A^{-1}...

3) Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$: [Co]

Def 13 : On appelle dilation (resp. transvection) de E un endomorphisme dont la matrice dans une certaine base est une matrice de dilation (resp. de transvection).

Prop 14 : $u \in GL(E)$ est une transvection ssi il existe une forme linéaire non nulle f et $a \in \ker(f)$ t.q. $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

Prop 15 :
- $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilations de E.
- $SL(E)$ est engendré par les transvections de E.

Exo 16 : Si $|K| \neq 2$, les dilations engendrent $GL(E)$.

Prop 16 : Les transvections sont conjuguées dans $GL(E)$. Elles sont conjuguées dans $SL(E)$ sauf si $n=2$ et K possède un élément qui n'est pas un carré.

Rq 17 : Les propositions ci-dessus seront utiles pour prouver que si $H \lhd GL(E)$ et H contient une transvection, alors $SL(E) \subset H$.

↳ utile pour prop 23.

4) Application : étude des sous-groupes distingués :

[Co]

Prop 18 : - Le centre de GL(E) est $Z(GL(E)) = \{\lambda id_E, \lambda \in K^*\}$
- Le centre de SL(E) est $Z(SL(E)) = \{\lambda id_E, \lambda \in K \text{ t.q. } \lambda^n = 1\}$

App 19 : Si K^* n'est pas isomorphe à L^* en tant que groupe (L est un corps), alors $GL_n(K)$ n'est pas isomorphe à $GL_n(L)$. En particulier, $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ ne sont pas isomorphes.

Def 20 : On note PGL(E) (resp. PSL(E)) le groupe quotient de GL(E) (resp. SL(E)) par son centre.

Dans la suite de cette partie, on suppose que l'on n'est dans aucun des 2 cas suivants : $n=2$ et $|K|=2$, ou $n=2$ et $|K|=3$.

Théorème 21 (admis) : Le groupe PSL(E) est simple.

Rq 22 : Si K est un corps fini, le théorème 21 nous permet de construire plein de groupes simples finis.

Prop 23 : Les sous-groupes dérivés de GL(E) et de SL(E) sont égaux à SL(E).

Appl 24 : Les morphismes de groupe $\varphi : GL(E) \to K^*$ se factorisent par le déterminant : $\exists\, g : K^* \to K^*$ t.q. $\varphi = g \circ \det$.

[FGN 2]

5) Sous-groupes finis de GL(E) :

Prop 25 : Soit H un sous-groupe fini de GL(E), alors les éléments de H sont diagonalisables.

Appl 26 (Théorème de Burnside) : Un sous-groupe H de GL(E) est fini ssi $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $u^N = id_E$ pour tout $u \in H$.

Exercice 27 : Soit H un sous-groupe fini de GL(E) dont tous les éléments sont d'ordre 2. Alors $|H| \leq 2^n$.

Appl 28 : Pour tout corps L, s'il existe un morphisme injectif de $GL_n(K)$ dans $GL_m(L)$ alors $n \leq m$. En particulier, si $n \neq m$, $GL_n(K)$ et $GL_m(L)$ ne sont pas isomorphes.

on peut parler aussi déq. s/t si on parle de rg.

II) Actions du groupe GL(E) :

[H2G2]

1) Action sur E et $\mathbb{P}(E)$:

m̃ transitive sur les familles libres de m̃ cardinal

Prop 29 : Le groupe GL(E) agit transitivement sur $E \setminus \{0\}$.

Def 30 : On appelle espace projectif et on note $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E. Si $x \in E$, on note $\bar{x}$ sa classe dans $\mathbb{P}(E)$.

Prop 31 : GL(E) agit transitivement sur $\mathbb{P}(E)$ par $u.\bar{x} = \overline{u(x)}$ (si $u \in GL(E)$, $x \in E$). Le noyau de cette action est l'ensemble des homothéties. Par passage au quotient, PGL(E) agit sur $\mathbb{P}(E)$.

2) Action par conjugaison :

Prop 32 : $GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{M}_n(K)$ par conjugaison :
$P.M = PMP^{-1}$, $P \in GL_n(K)$, $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

Rq 33 : Cette action s'interprète comme un changement de base.

Appl 34 : Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable ssi son orbite pour cette action contient une matrice diagonale. Cette action est très importante en théorie de la réduction.

3) Action par congruence :

Prop 35 : $GL_n(K)$ agit sur $\mathcal{M}_n(K)$ par congruence :
$P.M = {}^tPMP$, $P \in GL_n(K)$, $M \in \mathcal{M}_n(K)$.

Rq 36 : Cette action s'interprète comme un changement de base pour l'application bilinéaire de matrice M.

Def 37 : On note $\mathcal{S}_n(K)$ les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(K)$ (i.e. les $M \in \mathcal{M}_n(K)$ t.q. ${}^tM = M$).

Rq 38 : $GL_n(K)$ agit encore sur $\mathcal{S}_n(K)$ par congruence.

car ≠ 2

Prop 39 : Toute matrice de $\mathcal{S}_n$ est congruente à une matrice $\boxed{\text{diagonale}}$.

dvpt 1

Prop 40 : - Si $K = \mathbb{C}$, le rang est un invariant total pour cette action.
- Si $K = \mathbb{R}$, toute matrice de $\mathcal{S}_n$ est congruente à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, (p,q) est la signature de la matrice.

← unicité : c'est la dim du + gd ...

vrai pr un corps dt tt les élts sont des carrés

Def 41 : Si $B \in \mathcal{S}_n(K) \cap GL_n(K)$ et q_B est la forme quadratique associée, le groupe orthogonal $O(q_B)$ est le stabilisateur de B pour l'action par congruence. C'est un sous-groupe de $GL_n(K)$.

· Un équiv en $SL_n(\mathbb{R})$? (ou rap. [illegible]
où algo Gauss que pr décomp en transvec° : ou ± n.
ms là ce qui fait marcher c'est l'exp. des pts fixes [illegible]

Rq 42 : ⚠ si $K \neq \mathbb{R}$, il n'y a pas forcément de structure euclidienne.

Rq 43 : si B_1 et B_2 sont congruentes, alors $O(q_{B_1})$ et $O(q_{B_2})$ sont conjugués.

Def 44 : si $K=\mathbb{R}$ et $B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, on note $O(p,q)$ le groupe orthogonal. si $B = I_n$, on le note $O_n(\mathbb{R})$.

III) Cas des corps finis :

[Pe]

Dans cette partie, $K = \mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier.

Prop 45 (dénombrement) :

- $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)\cdots(q^2-1)(q-1)$
- $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = |SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

Appl 46 : (quelques isomorphismes exceptionnels)
On a · $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \sigma_3$
· $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \sigma_4$

On montre que $PGL_2(\mathbb{F}_3)$ s'injecte ds σ_4 (ac° s/ ?) puis card.

Application aux p-Sylows :

Prop 47 : $GL_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p-Sylow (p premier).

Prop 48 : Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Si G admet un p-Sylow alors H aussi.

Corollaire 49 : Tout groupe fini admet un p-Sylow (utiliser Cayley).

IV) Cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

Dans cette partie, si on ne précise pas, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Topologie :

[Rom]

Def/Prop 50 : On munit K^n d'une norme $\| \ \|$ quelconque (elles sont toutes équivalentes) et on définit une norme sur $M_n(K)$:
$|||M||| = \sup_{\|x\|=1} (\|Mx\|)$. $M_n(K)$ muni de cette norme est un espace vectoriel normé.

Prop 51 : les applications $\det : M_n(K) \to K$ et $GL_n(K) \to GL_n(K) : A \to A^{-1}$ sont continues, et même C

Appl 52 : (une étape de la méthode de Newton) si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^3, alors $\varphi : y \mapsto y - Df_y^{-1}(f(y))$ est de classe C^2.

Prop 53 : $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$

Appl 54 : $\forall A, B \in M_n(K)$, AB et BA ont le même polynôme caractéristique. ← supp A inv puis par densité.

Prop 55 : (connexité par arcs)

- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs.
- $SL_n(K)$ est connexe par arcs.

2) Sous-groupes orthogonaux de $GL_n(\mathbb{R})$:

2-1- $O_n(\mathbb{R})$:

Dans cette partie, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, ce qui lui donne une structure euclidienne.

Def 56 : On appelle groupe orthogonal le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$: $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tMM = I_n\}$. On appelle groupe spécial orthogonal le groupe $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

Rq 57 : Les éléments de $O_n(\mathbb{R})$ sont les matrices qui préservent le produit scalaire : $\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Appl 58 : (définition d'un angle) Le groupe $O_2(\mathbb{R})$ (resp $SO_2(\mathbb{R})$) agit sur les couples de demi-droites de $\mathbb{R}^2$. Les orbites de cette action sont les angles (resp. les angles orientés) de demi-droites.

Prop 59 : $SO_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$. En particulier, il est abélien.

Def 60 : On appelle réflexion orthogonale (resp. renversement) une matrice de $O_n(\mathbb{R})$ conjuguée dans $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$). [Pe]

Prop 61 : Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ et $r = rg(M - I_n)$. Alors M est le produit de r réflexions orthogonales, et pas moins. dvpt 2

Corollaire 62 : $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales et si $n \geq 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements.

Prop 63 : les réflexions sont conjuguées dans $O_n(\mathbb{R})$ et les renversements sont conjugués dans $SO_n(\mathbb{R})$.

Appl 64 : si $n \geq 2$, $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{\pm I_n\}$
si $n \geq 3$, $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{\pm I_n\} \cap SO_n(\mathbb{R})$

2-2 $O(p,q)$:

[Se]

Rappel/Notations 65 : On note $J_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$ $(p+q=n)$ et
$O(p,q) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tM J_{p,q} M = J_{p,q}\}$

Théorème 66 : $O(p,q)$ est homéomorphe à $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$. En particulier, si p et q sont non nuls, $O(p,q)$ a 4 composantes connexes.

Rem 67 : Le groupe $O(3,1)$ est appelé groupe de Lorentz et est utilisé en physique.

Annexe 1 : Pivot de Gauss :

Entrée : une matrice $A \in GL_n(K)$

Sortie : Des matrices de transvection $T_1 \cdots T_m$ telles que $T_1 \cdots T_m A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

- si $n=1$, renvoyer A
- sinon, si $a_{21} = 0$:
  - trouver i t.q. $a_{i1} \neq 0$ (existe car $A \in GL_n(K)$).
  - faire $L_2 \longleftarrow L_2 + L_i$ (on obtient $a_{21} \neq 0$)
- faire $L_1 \longleftarrow \left(\frac{1 - a_{11}}{a_{21}}\right) L_2 + L_1$

  on obtient $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$

- Pour $i := 2$ à n, faire

  $L_i \longleftarrow L_i - a_{i1} L_1$

  On obtient $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

- Appliquer l'algorithme récursivement à B. On obtient

  $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0$ (car A inversible)

- Pour $i := 2$ à n faire

  $L_1 \longleftarrow L_1 - \frac{a_{1i}}{a_{ii}} L_i$ $\rightarrow$ on obtient $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

Exemple : (pivot de Gauss toujours)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow \left(\frac{1-2}{2}\right) L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{6} L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Annexe 2 : Matrices apparaissant dans la leçon (en plus gras)

- dilation : $D_j(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \quad\quad\quad j \end{array}$

- transvection : $T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \lambda \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$ (colonne j)

- $J_{p,q} = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{p} & \\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{q} \end{pmatrix} \begin{matrix} I_p \\ I_q \end{matrix}$

Références :

- Perrin, Cognet, Caldero-Germoni (H_2G_2), FGN algèbre 2, Rombaldi (thèmes pour l'agreg), Serre.

Gpe linéaire d'un ev de dim finie E, sous-gpes de $GL(E)$. Applications

I Défense de plan.

Gpe $GL(E)$ ds le cas d'un corps qque — I : - générateurs
- ss-gpes

— II : actions

Corps particuliers — III : corps finis

— IV : $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ → topologie → euclidien

2 pts implts : - lien isomorf / matrices
- cor 7. Permet de voir pquoi on ~~est~~ va pvoir déduire de l'étude de $GL(E)$ ~~par~~ de thms très gnx s les gpes (eg cor 49).

Chx : parler bcp des gpes orthogonx

II Dvt 1 : (prop 39) tte mat de S_n est congr à une mat diag.

Rq. Preuve pas constructive, mais il existe un algo pr construire les matrices de passage. Si le tps : un expl av l'algo.

Thm. Soit $A \in S_n(\mathbb{K})$ sym. av $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tPAP$ soit diag.

On commence par prouver un lemme qui dit que la matrice sym. est entièrement déterminée par sa forme quadratique.

Lemme. Si ${}^txAx = 0$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$ alors $A = 0$.

Preuve (lemme). Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. Alors:

$$\underbrace{{}^t(x+y)M(x+y)}_{=0} = \underbrace{{}^txMx}_{=0} + \underbrace{{}^tyMy}_{=0} + 2\,{}^txMy$$

D'où ${}^txMy = 0$ car car$(\mathbb{K}) \neq 2$.

On a donc $M = 0$ (car ${}^te_iMe_j = m_{ij} = 0$ $\forall i,j$) □

Preuve (thm) Par récurrence sur n

- Si $n=1$, M est diagonale
- Si $n \geq 2$. Si $M = 0$ ok. Sinon, d'après le lemme, $\exists x \in \mathbb{K}^n$: ${}^txMx \neq 0$. On pose $F = \{y \in \mathbb{K}^n \text{ tq } {}^txMy = 0\}$

parce que constructif ; on le x pas "clair" à trouver. Se trouve avec le pivot de Gauss justement)

Mq $\mathrm{Vect}(x) \oplus F = \mathbb{K}^n$

- Soit $y \in \mathrm{Vect}(x) \cap F$. Comme $y \in \mathrm{Vect}(x)$, $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tq $y = \alpha x$. Et comme $y \in F$, on a ${}^txMy = \alpha \underbrace{{}^txMx}_{\neq 0} = 0$. Donc $\alpha = 0$ et $y = 0$.
- F est le noyau de la forme linéaire $\begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K} \\ y \mapsto {}^txMy \end{cases}$

À faire + vite : noyau d'une forme lin non nulle (car x pas de(s)) est de dim $n-1$ + 1 à 1 ad

Donc $\dim(F) \geq n-1$. Par argument de dim, on conclut.

-> permet de gagner du tps pr plus dvpper 2ème partie.

Soit $(x_2, \dots, x_n)$ une base de F. Ds la base $(x, x_2, \dots, x_n)$, la forme bilin associée à la matrice M est de la forme :

$$\begin{pmatrix} {}^txMx & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $M_1 \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{K})$ symétrique. On applique l'HR à M_1 et on a le résultat.

Algorithme de Gauss $\to PM{}^tP$ ↓ on veut un coeff non nul en ht à g

Expl : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{idem colonnes}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[L_3 \leftarrow]{L_2 \leftarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{idem colonnes}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

rq : faire les lignes d'abord ou les col. d'abord on s'en fout vu que 2 côtés ≠s ⇒ ça commute

Q : cmt trouver l'inv av l'alg de Gauss

(cpp12) →

$\underbrace{\begin{pmatrix} & P & \end{pmatrix}}_{\text{pdt des mat de transv.}} M = I_n$ avec op. sur les lignes.

Si M pas inv, au lieu de I_n : $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

III. Commentaires

- Pourrait être bien en + : décomposition polaire & thm spectral
- S3-S4 : marche pour ts les corps en fait mais faut pas ici la m
  topologie
- Peut faire une partie entière sur le pivot de Gauss
- Partie I. Garder quasi-tt. S-gpes finis pas nécessaire si pas de représentations.
- Partie II. Un peu indépendante. S/H conj. et congr.

Pas fort besoin de [illegible] ? [illegible].

⚠ à ne pas orienter la leçon sur ça.

- exp. vaut le coup (si on maîtrise).