2016

NOM : UMBER **Prénom :** Pierre **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : (101*) Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applicat

Autre sujet : (141) Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture, théorie de Galois, etc. Exemples et applications

On considère G un groupe et X un ensemble.

I. Définition et propriétés générales

Def 1 : On appelle action de G sur X la donnée de $\alpha : G\times X \to X$ telle que, si l'on note $\alpha(g,x) =: g\cdot x$: $\begin{cases} g\cdot(h\cdot x) = (gh)\cdot x \\ e\cdot x = x \end{cases}$

On parle ici d'action à gauche. On peut définir de manière analogue une action à droite. On note $G \curvearrowright X$.

Rem 2 : Cela revient à se donner un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathfrak{S}_X$, où $\rho(g)(x) = g\cdot x$

Prop. 3 : On suppose $H \triangleleft G$ et $H \subset \operatorname{Ker}\rho$, alors $G \curvearrowright X$ induit une action $G/H \curvearrowright X$.

Def 4 : Soit $x\in X$, on pose $\operatorname{Stab}(x) := \{g\in G,\ g\cdot x = x\}$, le stabilisateur de x. C'est un sous-groupe de G.

Def 5 : On pose $X^G := \{x\in X,\ \forall g\in G,\ g\cdot x = x\}$ le stabilisateur de G. De même, pour $g\in G$, on pose $X^g := \{x\in X,\ g\cdot x = x\}$.

Ex 6 : $\mathfrak{S}_n \curvearrowright A[X_1,\dots,X_n]$ en permutant les variables, alors $A[X_1,\dots,X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ est l'ensemble des polynômes symétriques

Def 7 : Pour $x,y\in X$, on pose $x\sim y \Leftrightarrow \exists g\in G,\ g\cdot x = y$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence, dite relation d'intransitivité. On note $\omega(x)$ la classe de x, dite orbite de x, et $X/G := X/\sim$

Ex 8 : Si $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\langle\sigma\rangle \curvearrowright \{1,\dots,n\}$, et l'étude des orbites de cette action permet de décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints

Ex 9 : Les orbites de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ sont les sphères de centre 0

Rem 10 : on a $\operatorname{Stab}(g\cdot x) = g\operatorname{Stab}x\, g^{-1}$

Prop 11 : $\Phi : G/\operatorname{Stab}(x) \to \omega(x)$, $g\operatorname{Stab}(x) \mapsto g\cdot x$ est bien définie et est une bijection

Def/prop 12 : On suppose $G_1 \curvearrowright X$ et $G_2 \curvearrowright X$. Les actions commutent si : $\forall g_1\in G_1, \forall g_2\in G_2$, $g_1\cdot(g_2\cdot x) = g_2\cdot(g_1\cdot x)$. On a alors $G_1\times G_2 \curvearrowright X$.

Def 14. L'action est transitive s'il n'y a qu'une orbite

Ex 15 : Le groupe des translations agit transitivement sur $\mathbb{K}^n$

Def 16 : L'action est fidèle si ρ est injective

Ex 17 : $G/\operatorname{Ker}\rho \curvearrowright X$ fidèlement.

Def 18 : L'action est libre si : $\forall g\neq e, \forall x,\ g\cdot x\neq x$. Si l'action est libre et transitive, on dira que le groupe agit simplement transitivement

Ex 19 : si $\dim_{\mathbb{K}} E<\infty$, $GL(E)$ agit sur les bases de E simplement transitivement

Prop 20 : une action libre est fidèle

II Exemples d'actions sur le groupe.

1) L'action régulière : $G \curvearrowright G$ par translation à gauche (resp. à droite) par $g\cdot h = gh$ (resp. $g\cdot h = hg^{-1}$). Ces deux actions commutent, sont libres et transitives.

App 21 : G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_G$

2) L'action par conjugaison : $G \curvearrowright G$ par conjugaison en posant $g\cdot h = ghg^{-1}$

On a $G^G = Z(G)$, et si $g \in G$, $Stab(g)$ est dit centralisateur de g.
G agit aussi sur les sous-groupes de G en posant $g \cdot H := gHg^{-1}$.
Alors $Stab(H)$ est dit normalisateur de H, c'est le plus grand sous-groupe K de G tel que $H \triangleleft K$.

III. Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

On suppose G et X finis.

Prop 22 (formule des classes) on a $|X| = \sum_{x \in X/G} \frac{|G|}{|Stab(x)|}$

Prop 23 (formule de Burnside) : on a $|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$

Th 24 (Cauchy) : Soit p premier, $p \mid |G|$. Alors G admet un élément d'ordre p

prop 25 Soit G un p-groupe (i.e. $|G| = p^\alpha$, p premier). Alors $|X^G| \equiv |X| [p]$

App 26 : Si G est un p-groupe, $Z(G)$ est non trivial

App 27 : Si G est un p-groupe, G admet un sous-groupe distingué de tout ordre.

Def 28 : On suppose $|G| = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$, p premier. On appelle p-Sylow de G un sous-groupe d'ordre p^α

Ex 29 : On note $TU_n(\mathbb{F}_p)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale $(1, \dots, 1)$ sur $\mathbb{F}_p$. Alors $TU_n(\mathbb{F}_p)$ est un p-Sylow de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$

Th 30 (Sylow) : on suppose $p \mid |G|$. On note $\#G = p^\alpha m$, $m \wedge p = 1$. Alors :
1) G admet un p-Sylow
2) G agit transitivement sur les p-Sylows par conjugaison
3) Si m_p est le nombre de p-Sylow de G, alors $m_p \equiv 1 [p]$ et $m_p \mid m$

Rem 31 : Un p-Sylow est distingué si et seulement si $m_p = 1$

App 32 : Il n'y a pas de groupe simple d'ordre 63

Dev 1 : Soit G un groupe d'ordre 60 simple. Alors $G \simeq \mathfrak{A}_5$ DEV 1

IV. Exemples d'actions de groupes en géométrie

Ex 32 : On définit un espace affine de direction E comme une action simple et transitive du groupe $(E,+)$

Ex 33 : k^* agit sur $E - \{0\}$ par $\lambda \cdot x = \lambda x$. Les orbites de cette action sont les droites vectorielles et $P(E) := E - \{0\}/k^*$ est l'espace projectif sur E

Def 34 : • Un repère affine d'un espace affine de dimension n est la donnée de $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ tel que $\langle A_0, \dots, A_n \rangle = \mathcal{E}$
• Un repère projectif de $P(E)$ de dimension n est la donnée de $P_0, \dots, P_{n+1} \in P(E)$ tel qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de E avec $P_0 = \pi(\sum e_i)$ et $P_i = \pi(e_i)$, $1 \leq i \leq n+1$.

Prop 35 : Le groupe affine $GA(\mathcal{E})$ agit simplement transitivement sur les repères affines

Prop 36 : Le groupe projectif $GP(E)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs.

Ex 37 : Soit E un espace euclidien. On définit les notions d'angles comme les orbites de E pour l'action de $SO(E)$ sur $O(E)$ (voir annexe). Dans le cas $n=2$, l'action de $SO(E)$ sur le cercle unité * permet de munir les angles orientés d'une structure de groupe abélien (isomorphe à $SO(E) \simeq S^1$)
* qui est libre et transitive

V. Action sur les matrices

Soit k un corps

Ex 38 : $GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright M_{n,p}(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche. Un invariant total est le noyau de $M \in M_n(\mathbb{K})$

Ex 39 : $GL_p(k) \curvearrowright M_{n,p}(k)$ par multiplication à droite. Un invariant total est l'image de $M \in M_n(\mathbb{K})$

Ex 40 : Les deux actions précédentes commutent, et donne lieu à la relation d'équivalence entre les matrices. Un invariant total est le rang et la forme normale des matrices de rang r est $J_r = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ $\}r$

Ex 41 : $GL_n(k) \curvearrowright M_n(k)$ par conjugaison. La classification des orbites est donnée par le théorème des invariants de similitude (on parle de relation de similitude)

Ex 42 : $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright M_n(\mathbb{R})$ (resp. $U_n(\mathbb{C}) \curvearrowright M_n(\mathbb{C})$) par conjugaison. Cette action traduit le changement de base orthonormale (resp. unitaire). Par exemple, pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l'orbite d'une matrice symétrique contient une matrice diagonale

Ex 43 : $GL_n(\mathbb{K}) \curvearrowright S_n(\mathbb{K})$ par congruence : $P.M = PMP^t$. On suppose car $\mathbb{K} \neq 2$: Alors deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elle représentent la même forme quadratique.

Th 44 : On suppose car $\mathbb{K} \neq 2$. Alors :

1) Si $\mathbb{K}$ possède une seule classe de carré, un invariant total est le rang, il y en a donc $n+1$

2) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, un invariant total est la signature. Il y en a $n+1$ de rang n.

3) Si $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$, alors un invariant total est le rang et le discriminant (i.e. la classe de $\det M$ dans $\mathbb{F}_q^*/\mathbb{F}_q^{*2}$). Il y en a $2n+1$ de rang n.

Dev 2 (Formule de réciprocité quadratique) : Soit p, q premiers impairs distincts. Si $a \wedge p = 1$, on pose $\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré mod } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}$

D_{E_V} 2

VI. Représentations linéaires

Soit G un groupe

Def 45 : Une représentation linéaire est $G \curvearrowright V$, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, tel que : $\forall g \in G, \rho(g) \in GL(V)$

Def 46 : On suppose que $G \curvearrowright X$. Alors cette action induit une représentation sur $V_X := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} \cdot e_x$ en posant $g \cdot e_x := e_{g \cdot x}$
De même, cette action induit une représentation sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ en posant $g \cdot f : x \mapsto f(g^{-1} \cdot x)$

Prop. 47 : ces deux représentations sont G-isomorphes

Ex. 48 : L'action régulière de G donne lieu à la représentation régulière R_G - qui est fidèle

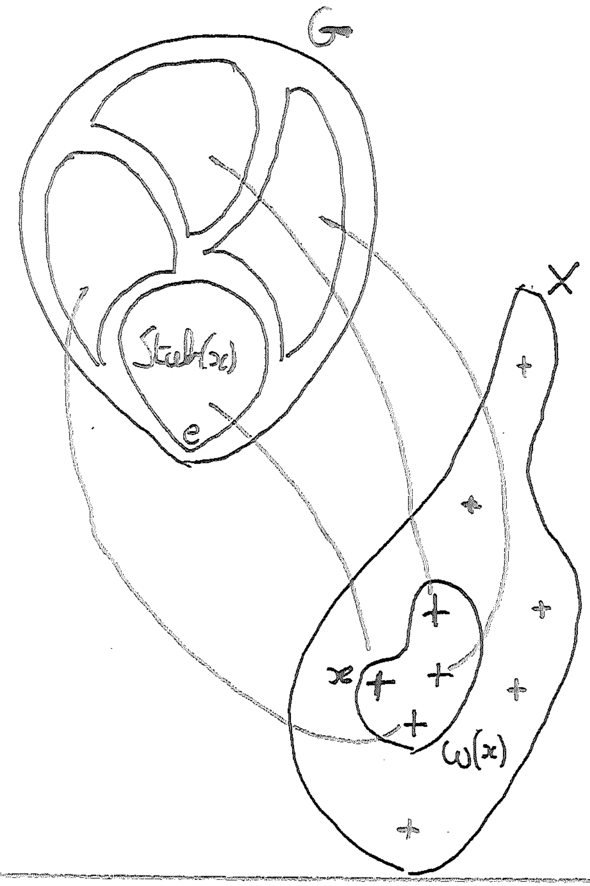
Prop. 49 : on a $\chi_{V_X}(g) = |X^g|$. En particulier, $\chi_{R_G}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ex 50 : L'action $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \{1; \dots; n\}$ donne une représentation sur $\mathbb{C}^n$, on a $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}(e_1 + \dots + e_n) \oplus$ Standard et Standard est une représentation irréductible. Si χ est le caractère associé, on a $\chi(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma) - 1$

App 51 : Cela permet de tracer la table de caractère de $\mathfrak{S}_4$ par exemple.

Rem. 52 : Etudier le stabilisateur d'une figure géométrique sous l'action du groupe affine permet aussi de déterminer la table de caractère d'un groupe.

Annexe 1. $\omega(x) \simeq G/\mathrm{Stab}(x)$



Annexe 2 : notion d'angles

Le groupe / agit sur	$SO(E)$	$O(E)$
Les couples de demi-droites	angles de demi-droites orientés	angles de demi-droites non orientés
Les couples de droites	angles de droites orientés	angles de droites non orientés

Annexe 3 : action de groupes sur les matrices.

Le groupe	agit sur	action	invariant total
$Gl_n(\mathbb{K})$	$M_{n,p}(\mathbb{K})$	$P\cdot M = PM$	Le noyau
$Gl_p(\mathbb{K})$	$M_{n,p}(\mathbb{K})$	$P\cdot M = MP^{-1}$	L'image
$Gl_n(\mathbb{K})\times Gl_p(\mathbb{K})$	$M_{n,p}(\mathbb{K})$	$(P,Q)\cdot M = PMQ^{-1}$	Le rang
$Gl_n(\mathbb{K})$	$M_n(\mathbb{K})$	$P\cdot M = PMP^{-1}$	invariants de similitude
$Gl_n(\mathbb{K})$ car $\mathbb{K} \neq 2$	$S_n(\mathbb{K})$	$P\cdot M = PMP^t$	si $\lvert \mathbb{K}^*/\mathbb{K}^{*2} \rvert = 1$, le rang
			si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la signature
			si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, le rang et le discriminant
$O_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	$O\cdot M = OMO^{-1}$	
$U_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$U\cdot M = UMU^{-1}$	