(102)*

NOM : COMETX **Prénom :** THOMAS **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 102 Nombres complexes de module 1 Ref : Perrin | Carrega |

Autre sujet : Sous groupes des racines de l'unité. Applications Rouvière | Rudin | Peyré

I- Nombres complexes de module 1

1) Définitions

Def 1 $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est le groupe des nombres complexes de module 1. C'est le noyau du morphisme
$$\left\{\begin{array}{l}(\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ z \longmapsto |z|\end{array}\right.$$

Prop 2 $\mathbb{U}$ est compact

Def 3 $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} z^n/n!$

Prop 4 exp définit un morphisme continu de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

Cor 5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = e^{ix}$ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$

Def 6 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{l}\cos x = \mathrm{Re}(f(x)) \\ \sin x = \mathrm{Im}(f(x))\end{array}\right.$

Prop 7 $\forall x \in \mathbb{R}$, • $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
• (Euler) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
• (Moivre) $(e^{ix})^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Application 8 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

Def 9 $\pi = 2\min\{x \geq 0 \mid \cos x = 0\}$

Prop 10 • f est surjectif, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$

Cor 11 $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Cor 12 $\mathbb{U}$ est connexe

Prop 13 $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\exists!\, r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$

Théorème 14 Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ est C^1, il existe $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^{i\theta(x)}$

Application 15 Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ une courbe telle que $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ et qui est paramétrée par abscisse curviligne. Alors il existe $C : I \to \mathbb{R}$ telle que si $\vec{T}(t) = \gamma'(t)$ et $\vec{N}(t) = i\gamma'(t)$ on ait $\frac{d\vec{T}}{dt} = C(t)\vec{N}$ et $d\vec{N}/dt = -C(t)\vec{T}$.

2) Sous groupe de $\mathbb{U}$, racines de l'unité

Def 16 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est le sous groupe des racines n-ièmes de l'unité

Prop 17 $\mu_n = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [0, n-1]\}$.

Cor 18 μ_n est cyclique, $\mu_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Cor 19 $\sum_{\omega \in \mu_n} \omega = 0$

Application 20 Soit $\sigma \in S_n$, on pose $M_\sigma \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M_{i,j} = 1$ si $j = \sigma(i)$, et 0 sinon. Alors M_σ est diagonalisable et si $\sigma = c_1 \dots c_r$ où les c_i sont des cycles à supports disjoints de longueur l_i, $Sp(M_\sigma) = \bigcup_{i \in [1, r]} \mu_{l_i}$

Application 21 (Résolution de $z^n = a$)
→ si $a = 0$, $z^n = a \Leftrightarrow z = 0$
→ si $a \neq 0$, $a = \rho e^{i\theta}$, alors $z^n = a$ $\Leftrightarrow z \in \mu_n \rho^{1/n} e^{i\theta/n}$

Prop-Def 22 $\mu_n^* = \{e^{2ik\pi/n}, k \wedge n = 1\}$ est l'ensemble des racines primitives de l'unité. C'est aussi l'ensemble des générateurs de μ_n.

NOM : Comete Prénom : Thomas Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 102

Autre sujet :

Cor 23. $|\mathbb{U}_n^*| = \varphi(n)$

Prop 24 $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n \iff m \mid n$

Prop 25 $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d \mid n} \mathbb{U}_d^*$

Cor 26 $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

Théorème 27 Soit $G \subseteq \mathbb{U}$, alors soit $G \simeq \mathbb{U}_n$ pour un certain n, soit $\overline{G} = \mathbb{U}$

Exemple 28. $\langle e^{i\theta} \rangle$ est dense dans $\mathbb{U}$ ssi $\theta \notin \mathbb{Q}$

$\cdot\ (\bigcup_{n \geq 1} \mathbb{U}_n)$ est dense dans $\mathbb{U}$ mais n'a pas de famille génératrice finie, il est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

II - Applications à la géométrie plane

Théorème 29 $\mathbb{U} \simeq SO_2(\mathbb{R})$ par $e^{i\theta} \mapsto \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Application 30 (Mesure d'un angle orienté)

Soient (u,v) et (u',v') deux couples de vecteurs unitaires, on dit que $(u',v') \mathcal{R} (u,v)$ ssi $\exists f \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.

L'ensemble des couples de vecteurs unitaires quotienté par cette relation est en bijection avec $SO_2(\mathbb{R})$ et définit un angle orienté. On définit sa mesure par θ où $e^{i\theta} = \rho^{-1}(\widehat{u,v})$

Application 31

Soit ABC un triangle direct où a, b et c sont les affixes de A, B et C. ABC est équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

Application 32 Les homographies de $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{U}$ invariant sont celles de la forme $\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}$, $|\alpha| \neq |\beta|$

III - Polynômes cyclotomiques

Def 33 On définit le n-ième polynôme cyclotomique par
$$\Phi_n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n^*} (X - \omega) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \wedge n = 1}}^{n} (X - e^{2ik\pi/n})$$

Exemple 34 $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = \cancel{X2}\ X+1$

$\Phi_p = 1 + X + \dots + X^{p-1}$ si p est premier

Rem 35 $\deg \Phi_n = \varphi(n)$

Prop 36 $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$

Rem 37 On peut calculer les Φ_n algorithmiquement avec Prop 36

Prop 38 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

Théorème 39 Φ_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$

Cor 40 Si $\omega \in \mathbb{U}_n^*$, Φ_n est le polynôme minimal de ω sur $\mathbb{Q}$

Application 41 (Théorème de Wedderburn)

Soit K un corps fini alors
→ K^* est cyclique
→ K est commutatif

2/3

NOM : COMETA Prénom : THOMAS Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 102

Autre sujet :

IV - Polygones constructibles

Def 42 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $M \notin A$, on dit que M est constructible (à la règle et au compas) en un coup à partir de A si une des conditions est vérifiée

1) M est l'intersection de deux droites passant par des points de A

2) M est l'intersection d'une telle droite et d'un cercle de centre $\Omega \in A$ et de rayon $\|\overrightarrow{B_1B_2}\|$, $B_1, B_2 \in A$

3) M est l'intersection de deux tels cercles.

Def 43 $M \in \mathbb{R}^2$ est dit constructible s'il existe $A_0 \subset A_1 \dots \subset A_n$ des parties de $\mathbb{R}^2$ telles que → $A_0 = \{(0,0), (0,1)\}$

→ $A_{i+1} = A_i \cup \{B_i\}$, $B_i \notin A_i$ et est constructible en un coup à partir de A_i

→ $M \in A_n$

Def 44 $w \in \mathbb{C}$ est constructible ssi le point de $\mathbb{R}^2$ associé l'est

Prop 45 $\{w \in \mathbb{C}$, w est constructible$\}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{Q}$.

Théorème 46 (Wantzel) $w \in \mathbb{C}$ est constructible ssi il existe des corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \dots \subset K_n \subset \mathbb{C}$ avec

→ $w \in K_n$ → $\forall i$, $[K_{i+1} : K_i] = 2$

Application 47 (Théorème de Gauss Wantzel)

$\omega_n = e^{2i\pi/n}$ est constructible ssi $n = 2^k p_1 \dots p_r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et p_i est premier de la forme $2^{m_i}+1$ avec $i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$

(on parle de nombres premiers de Fermat)

DEV 1

V - Caractères d'un groupe abélien fini

Soit G un groupe abélien fini.

Def 48 $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est le dual de G, l'ensemble de ses caractères

Exemple 49 $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mu_n$ donc $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (de cardinal ≥ 2)

Prop 50 $\widehat{H \times G} \simeq \hat{H} \times \hat{G}$

Prop 51 Si d est l'ordre maximal des éléments de G, tout caractère de G est à valeur dans μ_d.

Lemme 52 Soit $H \leq G$, et $\chi \in \hat{H}$, alors $\exists \tilde{\chi} \in \hat{G} \mid \tilde{\chi}|_H = \chi$

Théorème 53 (Structure des groupes abéliens finis)

Si G est abélien fini, $\exists d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tels que $d_n \mid d_{n-1} \mid \dots \mid d_1$

→ $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$

DEV 2

Cor 54 $\hat{G} \simeq G$

Rem 55 Si G n'est pas abélien, c'est faux :

$\hat{S_n} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3/3