NOM : PASCAL **Prénom :** Barbara **Jury :**

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 101. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et Applications

Autre sujet :

I) Notion d'action de groupe. Exemples

1) Généralités :

Déf 1 : Un groupe G opère sur un ensemble X (non vide) s'il existe une application
$G\times X \to X$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ vérifiant : $\forall x\in X$, $e\cdot x = x$; $\forall g,h\in G$ $\forall x\in X$ $g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x$.
On note $G \curvearrowright X$ (on dit aussi "action de G sur X").

Prop 2 : Si $G\curvearrowright X$ alors :
- $\forall g\in G$, $r_g : X\to X$, $x\mapsto g\cdot x$ est une permutation de X.
- Soit $\sigma(X)$ le groupe des permutations de X ; $r : G\to\sigma(X)$, $g\mapsto r_g$ est un morphisme de groupe.
- Soit $\lambda\in \mathrm{Hom}(G,\sigma(X))$ l'application $(g,x)\to\lambda(g)(x)$ définit une action de G sur X.

Ex 3 : $n\geq 2$, $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $\{1,\dots,n\}$ par $(\sigma,x)\mapsto\sigma(x)$.

Rque 4 : Soit H un sous-groupe de G ($H<G$) la restriction de r à H permet de définir une action de H sur X.

App 5 Soit A un anneau commutatif intègre. $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'anneau $A[T_1,\dots T_n]$ par $\sigma\cdot P(T_1,\dots,T_n) = P(T_{\sigma(1)},\dots,T_{\sigma(n)})$.

Déf 6 : On dit que $P\in A[T_1,\dots,T_n]$ est :
- symétrique si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\sigma\cdot P = P$
- alterné si $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\sigma\cdot P = \varepsilon(\sigma)P$
- semi-symétrique si $\forall\sigma\in\mathfrak{A}_n$, $\sigma\cdot P = P$.

Ex 7 : le déterminant de Vandermonde,
$$V(T_1\dots T_n)=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ T_1 & & T_n\\ \vdots & & \vdots\\ T_1^{n-1} & & T_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
est alterné.

Prop 8 : Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $car(\mathbb{K})\neq 2$, $F\in\mathbb{K}[T_1,\dots,T_n]$ semi-symétrique. Alors il existe un unique couple (P,Q) de polynômes symétriques tels que $F = P + VQ$.

Déf 9 : G opère fidèlement sur X si $r : G\to\sigma(X)$ est injectif (i.e. si $\forall x\in X$ $g\cdot x = x$, alors $g = e$).

Cor 10 : Si $G\curvearrowright X$ est fidèle, G est isomorphe à un sous-groupe de $\sigma(X)$.

Rem 11 : On peut toujours se ramener à une action fidèle via $G/\ker r \curvearrowright X$ par $\bar{g}\cdot x = g\cdot x$.

2) Orbites et stabilisateurs

Prop 12 : La relation binaire $x \overset{G}{\sim} y \Leftrightarrow \exists g\in G$ tq $y = g\cdot x$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées les orbites de X sous l'action de G, notées $\mathcal{O}_x = \{g\cdot x \mid g\in G\}$

Cor 13 : Les orbites sous l'action de G forment une partition de X.

App 14 : (Décomposition en cycles à supports disjoints) Soit $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et $G=\langle\sigma\rangle$, sous-groupe engendré par σ, $X=\{1,\dots,n\}$. $G\curvearrowright X$ naturellement, soient $F_1,\dots,F_r$ les orbites de X sous l'action de $\langle\sigma\rangle$. Alors les $\sigma_i(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\notin F_i\\ \sigma(x) & \text{si } x\in F_i\end{cases}$ sont des cycles d'ordre $|F_i|$, à supports disjoints et $\sigma=\sigma_1\circ\dots\circ\sigma_r$.

Déf 15 : G agit k-transitivement ($k\in\mathbb{N}^*$) si $\forall x_1,\dots,x_k\in X$ distincts, $\forall y_1,\dots,y_k\in X$ distincts, $\exists g\in G$ tq, $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ $y_i = g\cdot x_i$.
Si $k=1$ on dit que $G\curvearrowright X$ est transitive.

Ex 16 : $n\geq 3$, $\mathfrak{A}_n$ (le groupe alterné) agit $(n-2)$-transitivement sur $\{1,\dots,n\}$.

Déf 17 : $\forall x\in X$ on définit le stabilisateur de x sous l'action de G par :
$G_x = \{g\in G \mid g\cdot x = x\}$.

Prop18 : $\forall x \in X$, G_x est un sous-groupe de G

Ex19 : $G = \mathfrak{S}_n$, G_i est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Thm20 : Soit $G \curvearrowright X$, alors $\forall x \in X$, $\forall g \in G$, $G_{g \cdot x} = g G_x g^{-1}$ (i.e. si $y \in \mathcal{O}_x$ alors G_y et G_x sont conjugués dans $\mathcal{P}(G)$).

Rque21 : G agit naturellement sur $\mathcal{P}(G)$ par conjugaison via $(g,S) \longmapsto gSg^{-1} = \{gsg^{-1} \mid s \in S\}$, $g \in G$, $S \subset G$.

Thm 22 : Soit $G \curvearrowright X$. Alors $\forall x \in X$, $\alpha_x : \begin{array}{l} G/G_x \longrightarrow \mathcal{O}_x \\ \bar{g} \longmapsto g \cdot x \end{array}$ est bien définie et α_x est une bijection.

Rque23 : En général α_x n'est pas un morphisme.

3) Action de G sur lui-même

a) Action par translation à gauche

Déf24 : $G \curvearrowright G$ via $(g,h) \longmapsto g \cdot h = gh$.

Prop25 : Pour cette action on a, $\forall h \in G$, $G_h = \{e\}$ et $\mathcal{O}_h = G$, donc cette action est fidèle et transitive.

Thm26 : (Cayley) Si G est de cardinal fini n alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

b) Action par conjugaison :

Déf27. $G \curvearrowright G$ via $(g,h) \longmapsto g \cdot h = ghg^{-1}$

Déf28. Les orbites sous l'action de G par conjugaison sont appelées les classes de conjugaison de G. Le stabilisateur de $g \in G$ est appelé le centralisateur de g.

II) Action d'un groupe fini. Dénombrement. Structures :

1) Formules de dénombrement :

Prop29 : Soit G (fini) agissant sur X (fini). Alors $\forall x \in G$
$|\mathcal{O}_x| = [G : G_x] = |G/G_x| = |G|/|G_x|$.

Cor30 : (Equation aux classes) G et X finis et $G \curvearrowright X$. Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq r}$ une famille composée d'exactement un représentant de chaque orbite de X sous l'action de G alors $|X| = \sum_{i=1} |\mathcal{O}_{x_i}| = \sum_{i=1} [G : G_{x_i}]$.

App31 : Soit G (fini) de centre $Z(G)$ et $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$ une famille composée d'exactement un représentant de chaque orbite non réduite à un point pour l'action de G sur G par conjugaison alors :
$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} [G : G_{x_i}]$.

App32 : (Thm de Wedderburn) Tout corps fini est commutatif. DV1

Prop33 : (Formule de Burnside) G fini, X fini et $G \curvearrowright X$, on note, $\forall g \in G$, $Fix(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$ et r le nombre d'orbites de X sous l'action de G. Alors $r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$.

2) Application à l'étude des p-groupes :

Déf34 : p premier, $\alpha \in \mathbb{N}$ un groupe (fini) de cardinal p^α est appelé un p-groupe.

Déf35 : Soit $G \curvearrowright X$ on définit $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$.

Thm36 : Soit G un p-groupe agissant sur X alors si X est fini $|X^G| \equiv |X| \pmod p$.

App37 : Le centre d'un p-groupe est non trivial

App38 : p premier. Tout groupe de cardinal p^2 est abélien.

3) Les théorèmes de Sylow :

Déf39 : Si G est un groupe de cardinal $p^\alpha m$ avec p premier, $\alpha \in \mathbb{N}$ et $p \nmid m$. On appelle p-Sylow de G un sous-groupe de G de cardinal p^α.

Ex40 : (fondamental) $G = Gl_n(\mathbb{F}_p)$ où $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $|G| = (p^n - 1) \cdots (p^n - p^{n-1}) = m \cdot p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ avec $p \nmid m$.
Soit $P = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1\} \subset Gl_n(\mathbb{F}_p)$
P est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$, de cardinal $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
Donc P est un p-Sylow de $Gl_n(\mathbb{F}_p)$.

Thm41 : (1^{er} thm de Sylow) Soit G un groupe fini et p premier, $p \mid |G|$ alors G possède un p-Sylow (au moins)

Thm42 : (2^{e} thm de Sylow) Soit G un groupe (fini) de cardinal $p^\alpha m$ (p premier, $\alpha \in \mathbb{N}$, $p \nmid m$) alors
- si H est un sous-groupe de G et un p-groupe alors il existe un p-Sylow de G, S tel que $H \subset S$
- les p-Sylow de G sont tous conjugués (leur nombre k divise $|G|$)
- $k \equiv 1 \pmod p$ (donc k divise m)

App43 : A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60.

III) Applications générales :

1) Groupe opérant sur un espace matriciel.

a) Matrices semblables :

Déf 44 : $\mathbb{K}$ un corps. $Gl_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ via $\forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $P \cdot M = PMP^{-1}$. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartiennent à une même orbite elles sont dites semblables.

Prop 45 : Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Deux matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si et seulement si elles ont même polynôme caractéristique.

Prop 46 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si son orbite sous l'action de $Gl_n(\mathbb{C})$ est fermée.

b) Matrices congruentes : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Déf 47 : L'action par congruence de $Gl_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est définie par $Gl_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

$$(P, A) \longmapsto PAP^T$$

Thm 48 : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ alors $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

ContreEx 49 : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et I_2 de rang 2 ne sont pas congruentes.

2) Action de groupe en géométrie

a) Géométrie affine :

Déf 50 : un espace affine est la donnée d'un ensemble $\mathcal{E}$, d'un espace vectoriel E et d'une action fidèle et transitive de $(E, +)$ (abélien) sur $\mathcal{E}$.

Déf 51 : l'ensemble des bijections affines (i.e. préservant le barycentre) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ muni de la composition est appelé le groupe affine de $\mathcal{E}$ et noté $GA(\mathcal{E})$.

Prop 52 : – l'action de $GA(\mathcal{E})$ sur les repères affines est libre et transitive.
– l'action de $GA(\mathcal{E})$ sur $\mathcal{E}$ est 2-transitive (mais pas 3-transitive).
– l'action de $GA(\mathcal{E})$ sur les espaces affines de dimension k est transitive (mais pas 2-transitive.

b) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré.

Déf 53 : $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré

Prop 54 : $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathcal{H}$ par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Prop 55 : L'action de $SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I_2\}$ sur $\mathcal{H}$ est fidèle.

On pose $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{D} = \{z \in H,\ |Re z| \leq 1/2,\ |z| \geq 1\}$

Thm 56 : Soit G le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ engendré par S et T. Alors : – l'orbite de tout élément de $\mathcal{H}$ sous l'action de G rencontre $\mathcal{D}$.
– si $z \in \mathcal{D}$ et $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\gamma z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \gamma = \pm I_2$
– $G = SL_2(\mathbb{Z})$.

DV2

3) Représentations de groupes :

Déf 57 : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Une représentation (V, ρ_V) de G sur V est la donnée d'un morphisme $\rho_V : G \to GL(V)$ (i.e. d'une action linéaire de G sur V).

Ex 58 : Soit $u \in GL(V)$ telque $u^p = \mathbb{1}$ alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow GL(V)$, $\bar{h} \longmapsto u^h$ est une représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur V.

Déf 59 : On appelle caractère de la représentation (V, ρ_V) l'application de G dans $\mathbb{C}$ définie par $\chi(g) = Tr(\rho_V(g))$

Déf 60 : Un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G est appelé une sous-représentation de G.

Déf 61 : Si les seules sous représentations de V sont $\{0\}$ et V alors V est dite irréductible

Thm (de Maschke) 62 : toute représentation de G est somme directe de sous-représentations irréductibles.

Prop 63 : deux représentations V_1 et V_2 de G ont même caractère χ si et seulement si elles sont isomorphes.

Annexe : Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré